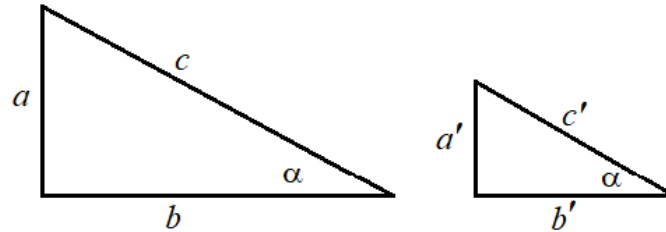


Trigonometria, szögfüggvények

“Harcos a masina.”

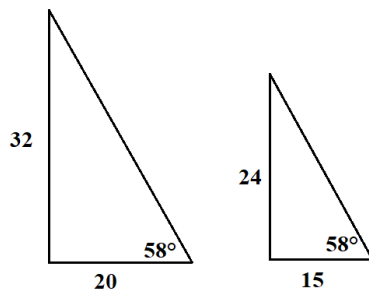
Kezdődik a *trigonometria* témakör.

Először olyan fogalmakról beszélünk, amelyek CSAK DERÉKSZÖGŰ háromszögekben igazak. Megfigyelhető, hogy ha két derékszögű háromszögnek van azonos nagyságú hegyesszöge, akkor a háromszögek hasonlók.



Ekkor $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, amiből algebrai átalakítással (“*ablakszabály*”) kapjuk, hogy $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$.

Tehát az α hegyesszöggel szemközti és az α melletti befogó aránya (hányadosa) megegyezik. Ez az arány ugyanekkora bármely olyan háromszögben, melynek ugyanekkora az α szöge.



Itt az ábrán egy példa, itt $\frac{32}{20} = \frac{24}{15} = 1,6$, de ez továbbgondolható, hogy minden olyan háromszögben, ahol $\alpha = 58^\circ$, meg lehetne mérni ezt az arányt, és minden ilyen háromszögben körülbelül 1,6-re jönne ki az 58° -kal szemközti befogónak és az 58° -os szög melletti befogónak a hányadosa.

Már az ókorban eszébe jutott matematikusoknak (Ptolemaiosz volt az első köztük), hogy az egyes szögekhez tartozó arányokat megmérjék és táblázatba foglalják.

Egy ilyen táblázat részlete látható a következő ábrán.

Látható, hogy az 58° -os hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszögek esetére a két megfelelő befogó hányadosa csak közelítőleg lesz 1,6.

Ezt a hányadost, mikor a szöggel szemközti befogót elosztjuk a szög mellett levő befogóval, a szöghöz tartozó tangensértéknek, vagy a szög tangensének nevezzük. Jelöléssel: $\operatorname{tg}58^\circ=1,6003$

A háromszögben többféle hányadost is lehet figyelni, mindegyik hányadosra létezik ilyen táblázat.

Hatféle ilyen hányados írható fel a háromszög oldalaira, mi a középiskolában négy ilyen hányadost tanulunk (kettőt meg nem).

Ennyi bevezető után nézzük meg, milyen segédanyagok magyarázzák ezt. A többféle magyarázat után még visszaveszem a szót.

A hegyesszög nagysága	A szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosa
49°	1.15...
50°	1.1918
51°	1.2349
52°	1.2799
53°	1.3270
54°	1.3764
55°	1.4281
56°	1.4826
57°	1.5399
58°	1.6003
59°	1.6643
60°	1.7321
61°	1.8040
62°	1.8807
63°	1.9626
64°	2.0...

Kérem kijegyzetelni az új és a lényeges dolgokat! Egyik cél, hogy tudjatok a füzetetekből is tanulni (pl. dolira való készülésnél).

https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2/lecke_07_067

https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2/lecke_07_071

<https://www.youtube.com/watch?v=zU-rBIEXMDE>

<https://zanza.tv/matematika/geometria/hegyesszögek-szögfuggvenyei-i>

<https://www.youtube.com/watch?v=Wa7vpeh5Qpo>

<https://www.mateking.hu/kozepiskolai-matek/trigonometria/szinusz-koszinusz-derekszogu-haromszögekben#0>

A függvénytábla 45. oldalán találjátok a szögfüggvények részletes definícióját. Megfigyeltem, hogy aki elhibázza a szögfüggvényekkel való számolást, az leggyakrabban ott rontja el, hogy összekeveri a szögfüggvényeket egymással. Emiatt minden feladat megoldásánál kérem a 45. oldalon ellenőrizni, jól írtad-e a fel szögfüggvénynek megfelelő arányt (vagyis hányadost - más szóval: törtet).

A függvénytáblában az 50. oldalnál kezdődnek a szögfüggvények táblázatai, kérem, nézzétek meg!

A szögfüggvényértékek táblázata a tudományos számológépekbe is be van programozva! Remélem, mindenkinek van tudományos számológépe (mondtam már szeptemberben, hogy áprilistól szükség lesz rá).

Szögfüggvények gyakorlása - számológéphasználat

Emlékeztető:

DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszög *szinusza* az α -t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó hosszának és az átfogó hosszának hányadosa. Jelölés: $\sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{a}{c}$$

DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszög *koszinusa* az α -t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szög melletti befogó hosszának és az átfogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\cos \alpha$.

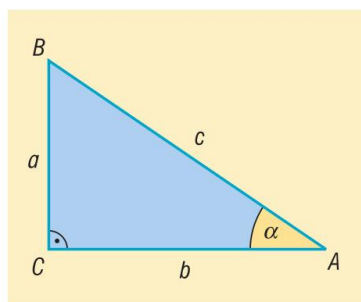
$$\cos \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{átfogó hossza}} = \frac{b}{c}$$

DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszög *tangense* az α -t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó hosszának és a szög melletti befogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\text{tg } \alpha$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{szöggel szemközti befogó hossza}}{\text{szög melletti befogó hossza}} = \frac{a}{b}$$

DEFINÍCIÓ: Az α hegyesszög *kotangense* az α -t tartalmazó tetszőleges derékszögű háromszögben a szög melletti befogó hosszának és a szöggel szemközti befogó hosszának a hányadosa. Jelölés: $\text{ctg } \alpha$.

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{szög melletti befogó hossza}}{\text{szöggel szemközti befogó hossza}} = \frac{b}{a}$$



hegyesszög szinusza

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

hegyesszög koszinusa

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

hegyesszög tangense

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$$

hegyesszög kotangense

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{ctg } \alpha}$$

Hogyan lehet ezeket számológéppel kiszámolni?

Pl. $\sin 72^\circ = ?$

Alapvetően kétféle tudományos számológép van. Az egyikén kiírja a beírt műveleteket, a másik nem. Az **egyiken** ha lenyomod a négyzetgyök gombot, akkor látsz egy négyzetgyök jelet, a **másik fajtán** nem.

Az egyik fajta tudományos gépen úgy kell kiszámolni négyzetgyök 9-et, hogy beütsz **9**-et és utána lenyomod a **négyzetgyök** gombot. Ezeket "hátagombolás" gépeknek nevezem viccesen, mert a műveleti gombot utólag kell lenyomni.

A másik fajta tudományos gépen úgy kell kiszámolni négyzetgyök 9-et, hogy lenyomod a **négyzetgyök** gombot, utána beütsz **9**-et és utána az **egyenlő** gombot. (És a kijelzőn végig meg is jelenik, hogy mit ütöttél be.) Ezeket "előtagombolás" gépeknek nevezem viccesen, mert a műveleti gombot először kell lenyomni.

A szögfüggvények használatánál nem mindegy, hogy milyen mértékegységben adjuk meg a szöget. Minden tudományos számológép kijelzőjén mutatja, hogy fokban, radiánban vagy gradusban dolgozik (ez egy vicces szögmértékegység, nem tanuljuk a derékszög értéke pl. 100 gradus). **Mi mindig fok mértékegységet használunk a számológépen!**

Hogyan lehet megtudni, fokban van-e a gép, és ha nem, hogyan lehet átkapcsolni fokra?

A kijelzőn minden tudományos gép jelzi, hogy milyen szögmértékegységet használ éppen.

- A fok jelzése egy D betű, vagy DEG szócska (degree=fok angolul).
- A radián jelzése egy R betű, vagy RAD szócska.
- A gradius jelzése egy G betű, vagy GRA szócska.

A **hátlgombolósoknál** szinte biztos, hogy van egy DRG feliratú gomb, azzal váltogathatják a három mértékegységet.

Az előlgombolósoknál ezenkívül még többféle eset is lehet:

- Lehet, hogy a DRG nem egy gombon, hanem egy gomb alatt vagy mellett van írva, akkor segédgomb (shift, 2ndf vagy hasonló) lenyomása után kell megnyomni, és akkor a gomb második jelentése lép életbe.
- Vagy: A MODE gombbal be kell menni a beállításokhoz. Ott egy menübe lépünk, ahol ki lehet választani, mit akarunk beállítani. Általában 1,2,3 stb gombokkal lehet választani a menüpontok közt.
- Van olyan gép, ahol a MODE gombot többször kell egymás után lenyomni, akkor jelenik meg a deg / rad / gra választás.
- Van olyan gép, ahol a SETUP gombbal kell indítani a menüt. Ha nem jó menübe léptél, nehogy kiválassz valamit, mert nehéz visszakapcsolni!

Azért fontos, hogy számológéppel számolj, mert az érettségin is csak azt engedélyezik, okostelefonnal nem számolhatsz. Persze, az okostelefonon is rajt avannak a szögfüggvények, ha a számológépeddel már tudsz számolni, akkor az otthoni munkádban nyugodtan használd a telefont.

Lássuk a $\sin 72^\circ$ -ot!

Ha a gép fok mértékegységbe van kapcsolva, akkor

- a hátlgombolós gépekbe **72**-t kell ütni, és utána le kell nyomni a **sin** gombot.
- az előlgombolós gépeken le kell nyomni a **sin** gombot, utána **72**-t kell ütni, és utána megnyomni az **egyenlő** = gombot.
- Több olyan gép van, ahol egy kezdő zárójelet is kiír a gép, így: **sin(72** -jobb ha megszokjátok, hogy leüttök ilyenkor egy) **zárójel vége** gombot, de most anélkül is jól kiszámolja a gép, mert nincs újabb művelet utána.

Ezt írja ki a gép: 0,951056516 ez a $\sin 72^\circ$ értéke. Ha tesztbe írod be, négy értékes jegyre kerekíts: 0,9511

Ugyanígy meggy a $\cos 72^\circ$ is: $\cos 72^\circ = 0,3090$ (az utolsó nullát is le kell írni, ha ez kerekített érték).

A tangensnél van egy kis gixer, mert mi, magyarok a $\text{tg} 72^\circ$ jelölést alkalmazzuk, de a gépen ez a **tan** feliratú gomb (angol nyelvterületen ezt a rövidítést használják). Így kiszámolhatjuk: $\text{tg} 72^\circ = 3,078$

A legnagyobb gond a kotangensnél van, mert nincs ilyen gomb a számológépen. De a múltkori anyagból tudjuk, hogy $\text{ctg} 72^\circ$ épp a reciproka a $\text{tg} 72^\circ$ -nak, és így ki tudjuk számolni. Amikor a $\text{tg} 72^\circ$ -ot kiszámoltad, NE NULLÁZD a gépet! Hanem csak nyomd meg a reciprokok gombot. A hátlgombolósoknak már ki is jön az eredmény, az előlgombolósoknak még egy egyenlő gombot kell nyomni.

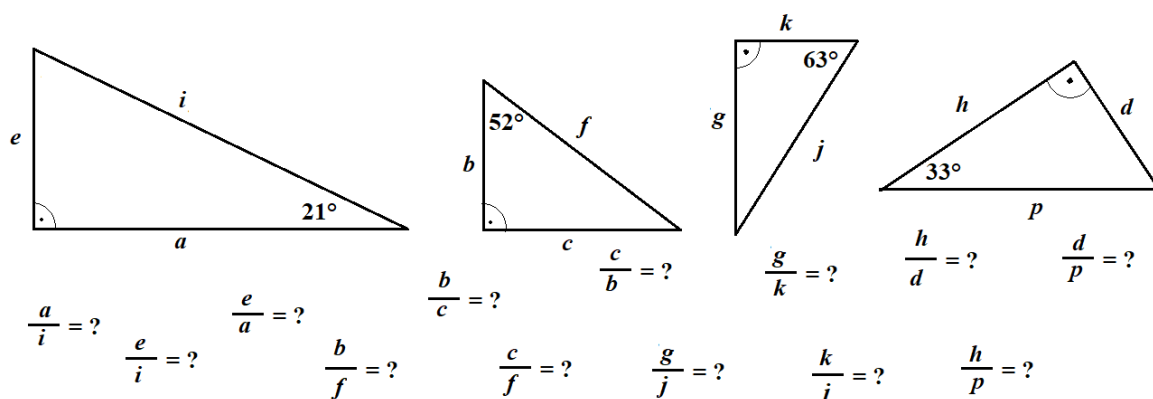
A reciprokok gomb nem minden gépen ugyanolyan. Van, amelyik gépen a felirata **1/x**, van olyan gép, ahol **x⁻¹** a felirata. (Persze, tavaly tanultuk, hogy a reciprokok az a "mínusz 1-edik" hatvány.) Tehát $\text{ctg} 72^\circ = 0,3249$

Házi feladat:

Számold ki a következő szögek négy tanult szögfüggvényét a számológéppel:

15°, 30°, 32°, 40°, 45°, 50°, 58°, 60°, 75°.

Írd fel az ábrák alapján a kért arányok értékét! (A derékszögű háromszögek megadott hegyesszögeinek szögfüggvényeit használd!)



Egy példa:

$$\frac{d}{h} = \frac{33^\circ - \text{os szöggel szemközti befogó}}{33^\circ - \text{os szög mellett befogó}} = \text{tg}33^\circ = 0,6494$$

Három megjegyzés, tévedések elkerülésére:

1. Önmagában értelmetlen mindegyik szögfüggvény neve! Ha csak annyit írok le, hogy "sin", akkor félig írtam le egy képletet. Olyan, mintha egy gyökjelet írnék le üresen: $\sqrt{\quad}$ -ez önmagában így értelmetlen, nincs kitöltve, hogy milyen számra végezzük a gyökvonást! Ugyanilyen értelmetlen az, ha nem írunk oda a szöveget a "sin" mellé! Tehát akár a szöveget jelölő betűvel együtt: $\sin\beta$ vagy akár a konkrét szöggel együtt: $\sin53^\circ$ kell leírni a szögfüggvényeket.
2. Ne keverd a szögfüggvényértékeket a szögekkel!
Aki ilyet ír pl, hogy " $\sin\beta=48^\circ$ ", az súlyos hibát követ el.
Az is hibázik, aki ezt írja: " $\sin 0,7431=\beta$ "
Helyesen így van: $\sin48^\circ=0,7431$.
3. A szögfüggvények nevei nem szorzótényezőzők! Ha leírom azt, hogy $\sin77^\circ$, akkor a \sin és a 77° közt nincs semmilyen matematikai művelet! Tapasztalatból mondom, hogy a diákok hajlamosak rá, hogy azt higgyék, van valami misztikus "sin" szám, amivel megszorozzuk a 77° -ot. Nem! **$\sin77^\circ$** csak egy arányt jelöl - így a szöggel együtt leírva.
Példát mutatok: ezt a törtet: $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$ pl. **nem lehet** egyszerűsíteni ! Az értéke nem 2.
Ha kiszámolom, akkor $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{0,6428}{0,3420} = 1,879$ lesz és nem 2.
4. Egy hegyesszögnek a szögfüggvényét **csak derékszögű** háromszögben lehet felírni a tanult módon (két oldal hányadosaként). Tehát **mellette egy derékszögnek kell lenni** a háromszögben. Ebből következik, hogy magának **a derékszögnek nem írhatom fel** így a szögfüggvényét – mert mellette nem lehet ott egy másik derékszög!

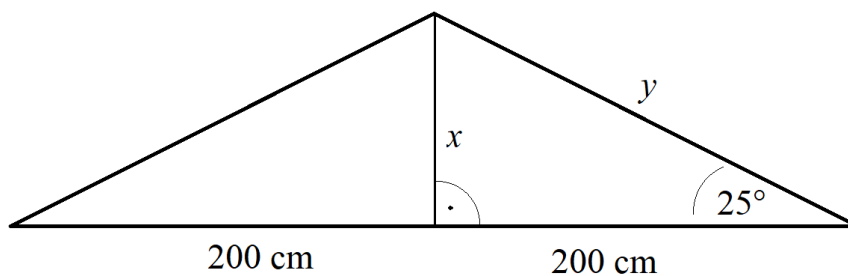
...és most hasznosítjuk eddigi tudásunkat! Egy történetet mesélek el.

A benne szereplő számokra pontosan nem emlékszem, azok nem egyeznek, de az eset ez volt:
Egyik este csengett a telefonom, egyik kollégám hívott. A beszélgetés nagyjából ez volt:

-Péter, tudsz segíteni? Egy garázst építünk az udvaron, 4 méter szélesre tervezzük, és sátorszerű, kétoldalról ferde tetőt tervezünk rá. A tetőfedő anyagra rá van írva, hogy legalább 25°-os kell legyen a tető emelkedési szöge. Ha tartani akarom ezt a 25°-ot, akkor mekkorára vágjam a tető gerendáit? És mekkora függőleges tartófa kell középen? Ki lehet ezt valahogy számolni?

-Igen, ki lehet. Nemsokára visszahívlak!

Készítettem egy ábrát a tetőről, ráírtam az adatokat. Mivel az építkezésnél pontosan kell mindennek passzolni, emiatt centiméterekkel számoltam.



Tehát az x és y szakaszok hossza a kérdés. Kezdem az x szakasszal.

Szögfüggvényt akarok felírni, a 25°-os szög egyik szögfüggvényére lesz szükség. Két oldal arányát kell felírnom.

Van egy ismert oldalam: **a szög melletti befogó** 200.

Amit ki szeretnék számolni, x : az pedig a **szöggel szemközti befogó**.

Most megnézem a képleteimet (függvénytábla 45. oldal), és két olyan szögfüggvényt is látok, mely a két befogót tartalmazza: a **tangens** és a **kotangens** szögfüggvényeket. Bármelyik jó lenne, de a számológépen nehézkes dolog a kotangenst kiszámolni. Emiatt ha a **két befogóra** írok fel szögfüggvényt, **mindig tangenssel dolgozom!** Felírom tehát a 25° tangensét:

$$\operatorname{tg}25^\circ = \frac{25^\circ\text{-kal szemközti befogó}}{25^\circ\text{ melletti befogó}}$$

Kiszámolom számológéppel, hogy $\operatorname{tg}25^\circ = 0,4663$ és behelyettesítem az ábra adatait is:

$$0,4663 = \frac{x}{200}$$

Egyenletet kaptam, melyből az x -et ki lehet számolni! Beszorok 200-zal mindkét oldalon:

$$93,26 = x \quad \text{-kijött az } x \text{ befogó hossza! Nyilván cm-ben lesz, mert a 200 is cm-ben volt.}$$

Az y -t kiszámolhatnám Pitagorasz tételével is, de itt megint szögfüggvényel számolok! Ismét megnézem a háromszöget, y az **átfogó**, 200 pedig a **25°-os szög melletti befogó**. (most már használhatnám a 93,26 cm-t is, de az kerekített, pontatlan, a 200 cm pedig pontos érték.)

Megint megnézem a képleteimet, melyikben szerepel az **átfogó** és a **szög melletti befogó**? Hát a koszinuszban! Felírom:

$$\cos 25^\circ = \frac{25^\circ\text{ melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

Kiszámolom számológéppel, hogy $\text{tg}25^\circ = 0,4663$ és behelyettesítem az ábra adatait is:

$$0,9063 = \frac{200}{y}$$

Egyenletet kaptam, melyből az y -t ki lehet számolni! Beszorok y -nal mindkét oldalon:

$$0,9063 y = 200 \quad - \text{most mindkét oldalt osztom } 0,9063\text{-mal:}$$

$$y = 220,7 \text{ kijött az átfogó hossza! Nyilván ez is cm-ben lesz.}$$

Telefonon elmondtam a méreteket. Jó lett a garázs!

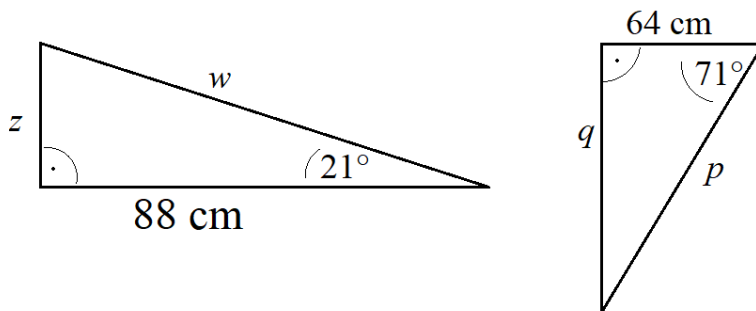
Házi feladat:

1. Oldd meg ezt a feladatot más adatokkal!

a) A garázs szélessége 4,4 méter, a tető emelkedési szöge pedig 18° .

b) A garázs szélessége 5 méter, a tető emelkedési szöge pedig 40° .

2. Számold ki a háromszögekben a hiányzó adatokat!



“Harcos a masina.”