## **Vasi Géniusz verseny – matematika és logika**

## **A középiskolai 1. feladatsor és megoldásai**

1. Egy túravezető egy nyolcfős csoporttal túrázik. Egyszerre csak egy útelágazáshoz érnek, ahol négyfelé lehet továbbmenni. A túravezető emlékezete szerint valamelyik úton 20 percnyi járásra van a turistaház, ahol meg tudnak szállni. Mivel egy óra múlva sötét lesz, ezért a túravezető csoportokra osztja a turistákat (önmagát is „beosztva”), s azt kéri tőlük, hogy minden csoport menjen 20 percig egy-egy úton, és akkor akár meglátják a turistaházat, akár nem, mindenképp forduljanak vissza. Így ha 40 perc múlva visszaérnek az elágazáshoz, s elmondják, meglátták-e a szállást, akkor kiderül, melyik úton kell majd elindulni. A vezető indulás előtt megtudta, hogy két tréfamester van a turisták közt, akik néha hazudnak, néha igazat mondanak, attól függően, hogy milyen épp a hangulatuk. Hogyan kell a „felderítőcsoportokat” kialakítani, hogy beszámolóik gyors mérlegelése után mindenképp biztosan elérhessen a túracsoport sötétedésig a turistaházba? (A túravezető becsületes, ő nyilván nem hazudik „saját magának”...)
2. Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalán fekszik P pont, BC oldalán Q pont, AC oldalán pedig az R és S pont úgy, hogy AP=AS, BP=BQ és CQ=CR. Igazold, hogy PQRS húrnégyszög!



1. Dekorációként az ábrán látható vidám majomfejet szeretnénk elkészíteni három egymást érintő körből. Szeretnénk, ha a k1 kör sugara 25 cm lenne, a k2 és k3 körök azonos sugarúak lennének, és érintkezési pontjuk 20 cm távolságra lenne a k1 kör körvonalától. Mekkora a k2 és k3 körök sugara?
2. Az x1, x2, ..., x100 valós számokra teljesül a következő száz egyenlőség:



 Határozzuk meg az *x*5 értékét!

1. Egy osztályba 36 diák jár. Mindegyiküknek pontosan három barátja van az osztályban. Mutassuk meg, hogy egy kör alakú asztalhoz leültethetünk a diákok közül páros számút úgy, hogy mindegyikük két barátja között üljön!

## **Megoldások**

***1. feladat*:**

A túravezető két háromfős és egy kétfős csoportra osztja a turistákat. Elküldi őket három úton, a negyediken saját maga indul el. Ha ő meglátja a szállást, nem törődik a turisták beszámolóival, elviszi őket a saját útján.

Ha az ő útján nem volt turistaház, akkor meghallgatja a turisták beszámolóit.

Ha minden csoport minden embere egybehangzóan ugyanazt állítja, akkor a két hármas csoport biztosan igazat mond, s e két információ alapján megvan, hol lehet a szállás. (Lehet esetleg mindkét tréfamester a kétfős csoportban, s hazudhatnak akár mindketten, de ez így nem lesz figyelembe véve.)

Ha egy olyan csoport van, ahol különböznek a beszámolók (pl. egyik turista azt állítja, hogy meglátták a szállást, kettő pedig azt, hogy nem – nevezzük ezt „ellentmondó” csoportnak), ott biztosan van tréfamester, ezen ellentmondó csapat tagjainak a beszámolóit nem vesszük figyelembe, így a többi csoport minden tagja biztosan igazat mond, s beszámolóik alapján egyértelmű, merre van a szállás.

Ha két olyan csoport van, ahol különböznek a tagok beszámolói (két ellentmondó csoport), ott mindkettőben biztosan van hazudó tréfamester, de e két csapat közül legalább az egyik biztosan háromtagú. Egy háromtagú ellentmondó csoport két tagjának a beszámolója megegyezik, s mivel ez esetben csak egy tréfamester lehet a csoportban, biztos, hogy ők ketten igazat mondanak. Így a háromfős ellentmondó csoportokról tudhatjuk, hogy megtalálták-e a szállást, s ennek alapján már megmondható, merre kell menni.

***2. feladat*:**

Az ábra szerint megrajzolható az ABC háromszög *f*A, *f*B és *f*C szögfelezője, ezek a háromszögbe írt kör K középpontjában metszik egymást. Mivel APS egyenlő szárú háromszög, ezért *f*A egyenese a PS szakasz szakaszfelező merőlegese. Így K egyenlő távolságra van P és S pontoktól. Ugyanígy BPQ és CRQ háromszögek is egyenlő szárúak, tehát K P-től és Q-tól, illetve Q-tól és R-től is egyenlő távolságra van. KS=KP=KQ=KR miatt S, P, Q, R pontok egy körön helyezkednek el, tehát húrnégyszöget adnak. Ez az okoskodás akkor is érvényben marad, ha S és R fordított elhelyezkedésűek az AC szakaszon.

***3. feladat*:**

Jelölje K1, K2 és K3 a körök középpontját, E pedig a k2 és k3 körök érintési pontját, *x* pedig a keresett két sugár hosszát! Ekkor az ábrán látható K1EK3 derékszögű háromszög oldalaira felírhatjuk a Pitagorasz-tételt: 

Ebből már kiszámolható az *x* hosszúság:

 

Tehát mindkét kör sugara 28 cm.

***4. feladat*:**

Először adjuk össze az összes egyenletet! A baloldalon egy 300 tagú összegben az összes ismeretlen háromszor szerepel, a jobboldalon pedig 2001+2002+...+2100=(2001+2100)⋅50=4101⋅50=205050 áll (itt úgy összegeztünk, hogy a 100 darab tagból 50 darab 4101 összegű párt képeztünk). . Ha mindkét oldalt hárommal osztjuk, megkapjuk az összes ismeretlen összegét: . **(I. egyenlet)**

Tekintsük ezután a következő 32 darab egyenletet:



Ha ezeket összeadjuk, akkor a baloldalon az  összeget kapjuk, a jobboldalon pedig 2006+2009+...+2099=(2006+2099)⋅16=4105⋅16=65680 áll (itt is úgy összegeztünk, hogy a 32 darab tagból 16 darab 4105 összegű párt képeztünk). Tehát . Ha ehhez hozzáadjuk a második,  egyenletet, akkor az  egyenletet kapjuk **(II. egyenlet)** . Itt a baloldalon az összes ismeretlen összege áll, az *x*5 kivételével.

Tehát az I. egyenletből a II. egyenletet kivonva megkapjuk a keresett értéket: .

***5. feladat*:**

Tekintsünk egy tetszőleges diákot, írjuk fel egy papírra a nevét! Írjuk alá egy barátjának a nevét, majd a második diák neve alá annak egy másik barátjának a nevét. Mivel mindenkinek három barátja van, létezik ilyen harmadik diák. Írjuk fel a papírra a harmadik diák egy olyan barátját, aki eddig még nem szerepel a listán – ilyen biztosan van, hisz mindenkinek 3 barátja van. Folytassuk ezt az eljárást addig, amíg olyan diákhoz nem érünk, akinek már mindhárom barátja a listán van, legyen e diák sorszáma a listán *n*. Az ő egyik barátja nyilván a listán előtte szereplő (*n*-1)-edik diák. Legyen a listán levő maradék két ismerőse a *k*1 és a (nála nagyobb) *k*2 sorszámú. A feltételek szerint körbe lehet ültetni egy asztalhoz akár a lista *k*1-től *n*-ig sorszámozott tagjait, akár a lista *k*2-től *n*-ig sorszámozott tagjait, vagy akár a lista *k*1-től *k*2-ig terjedő tagjait a listán *n*. sorszámot viselő diákkal együtt. Ha az első kettő említett körbeültetés közül mindkettő páratlan sok diákot tartalmazna, akkor a *k*2–*k*1 különbség páros, azaz a harmadik körbeültetés mindenképp páros sok (pontosan: *k*2–*k*1+2 db) diákot tartalmazna.

*Egy példa*: Ha pl. a listát csak 15 diákig tudjuk írni, mert a 15. diáknak mindhárom barátja már a listán van, akkor e három közül az egyik barátja az előző, aki 14. a listán. Legyen pl. a 15. listatag másik két ismerőse az 5. és a 11. diák a listán. Ekkor egy asztal köré ültethetők a feltételek szerint az 5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15 sorszámú diákok és a 11-12-13-14-15 sorszámú diákok is. Mindkét kör páratlan számú diákot tartalmaz, de épp ilyen esetben az 5-6-7-8-9-10-11-15 kör páros sok diákból áll és megfelel a feltételeknek.