1. munkalap

Tehetséggondozó feladatsor matematikából

1. Meg lehet-e adni hét olyan pozitív egész számot, hogy mindegyikük pontosan három másik számmal legyen páronként relatív prím?

2. a) Szerkessz hat pontot, hogy mindegyik pont épp 3 másiktól legyen 3 cm távolságra!
   b) Megoldható-e a feladat hét ponttal is?

3. Oldd meg az egyenletet a pozitív egész számok körében:
   $$x^4 = y^4 + 10736$$

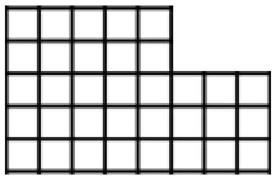
4. Igazold, hogy ha x, y és z valós számok közül pontosan egyik szám kisebb 1-nél, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:
   $$x + y + z + xyz \leq 1 + xy + xz + yz$$

5. Az ikozaéder olyan 20 lapú test, melynek minden lapja szabályos háromszög, s minden csúcsában öt szabályos háromszög találkozik.
   a) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két csúcsát, mekkora az esélye, hogy az őket összekötő szakasz a test belsejében halad?
   b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk a test két élét, mekkora az esélye, hogy közös valamelyik végpontjuk?

6. Melyik az a másodfokú függvény, melyre f(–3)= –17 , f(2)=22 és f(5)= –9 ?

7. Bontsuk a lehető legtöbb (legalább elsőfokú) polinom szorzatára:
   $$x^{12} - 1 =$$

8. A mellékelt ábrán látható, négyzetekből álló síkidomot vágjuk szét négy egyenes vágással úgy, hogy a keletkező részekből egyetlen négyzetet lehessen összeállítani!



9. Két kör középpontja az $O_1(3; 3)$ és az $O_2(–5; -1)$ pont. A körök metszéspontjainak egyike az x, a másik az y tengelyen van.
   a) Szerkesszük meg a koordináta-rendszert, a két pontot és a köröket!
   b) Írjuk fel a két kör egyenletét!

10. Egy 25 cm magasságú, szabályos négyoldalú gúla alakú edény teljesen zárt, benne folyadék van. Ha a talpára állítjuk, akkor x cm magasságban, ha a csúcsára állítjuk, akkor y cm magasságban áll benne a folyadék. Igazolja, hogy x és y számok közül legalább az egyik irracionális!
    - A megoldáshoz használható a Wiles-Fermat tétel: Ha $n \geq 3$ és a, b, c, n pozitív egészek, akkor soha nem teljesülhet az $a^n + b^n = c^n$ egyenlőség. (Pierre de Fermat-nak ezt a XVII. században megfogalmazott tételét 1993-ban igazolta Andrew Wiles.)

Négylépcsős segítség a feladatok megoldásához, megbeszéléséhez

I. lépcső: a feladat pontos megértését segíti, a feladatban szereplő fogalmak értelmezése II. lépcső: indító ötlet, speciális esetek vizsgálata, hasonló feladat keresése III. lépcső: lényegi ötletek, a megoldás rövid vázlata IV. lépcső: a megoldás elemzése, ötlet továbbvitelének lehetősége

1. feladat

I. Nézd meg a relatív prím fogalmát, adj példákat relatív prímekre, hét próbaképp választott szám közt jelöld a relatív prímeket!

II. Nézd meg az (irányítatlan) gráf fogalmát, a fokszám fogalmát! Gráffal ábrázold hét próbaképp választott szám közül a relatív prímeket! Kísérletezz, lehet-e minden csúcs 3 fokszámú!

III. Létezik egy gráfelméleti tétel a csúcsok fokszámainak összegére vonatkozóan. Próbáld alkalmazni a tételt a relatív prímeket jelző gráfra!

IV. Hány szám esetére lehet megoldani a feladatot? Konstruálj megoldást 8 szám esetére!?

2. feladat

I. Megfelel az a) rész feltételeinek egy szabályos háromszög három csúcsa és három oldalfelezőpontja? És egy szabályos hatszög hat csúcsa? És ha az egyik csúcsot a hatszög középpontjára cseréled? Mi miatt rosszak e példák?

II. Egyszerűsítsd a feladatot! Csak azt a gráfot rajzold meg, amelyben a 3 cm-re levő pontok vannak összekötve! Létezik ilyen gráf?

III. Ha találtál többféle megfelelő gráfot, próbáld azoknak megfelelően elhelyezni a pontokat! egyik módon sikerülni fog. (Ne feledd, hogy ha három csúcs páronként össze van kötve, az szabályos háromszöget kell megadjon!)

IV. Most nézd meg az 1. feladatot és következtess az ott szereplő gráfelméleti tételből a b) rész megoldhatóságára! Próbálj egységes megoldási módszert keresni $2n$ db pont esetére!

3. feladat

I. Írd fel az első néhány pozitív egész negyedik hatványát! Próbáld az egyenletet átrendezni!

II. A megfelelően átrendezett egyenlet baloldalát szorzattá alakíthatod. A jobboldalt prímtényezőkre bonthatod.

III. Az egyenlet jobboldalának szorzatalakjában és a baloldal prímfelbontásában próbálj megfelelő tényezőket párba állítani! Vedd figyelembe, hogy egész számok összege és különbsége milyen paritású (párosságú) lehet!

IV. Mi garantálja, hogy egyértelműen meg lehetett oldani a feladatot? Cseréld ki a 10736-ot úgy, hogy továbbra is csak egy megoldás legyen lehetséges!

4. feladat

I. Próbáld ki, igaz-e az egyenlőtlenség néhány számhármasra! Próbálj olyan esetet találni, melyre egyenlőség áll fenn!

II. Próbáld az egyenletet átrendezni! Keress olyan átrendezést, melyet tovább lehet alakítani.

III. Nullára rendezve az egyenletet, próbáld meg a túloldalt szorzattá alakítani! Ha nem megy, csak az egyik részéből próbálj kiemelni – például az x-es tagokból x-et. Következtess előjelre feladat feltételéből és a szorzatalakból!

IV. Mikor igaz az egyenlőség? Igaz-e az állítás megfordítása?

5. feladat

I. Próbáld kiszámolni, hány csúcsa és hány éle van az ikozaédernek! Számold össze az egyes lapokon levő csúcsokat, és az összes oldalakat, gondold át, hány esik egybe, s ebből következtess, hány lap és csúcs lehet! Eredményeidet ellenőrizheted a függvénytáblázatban vagy az Interneten is.

II. Fogalmazd át, mit jelent az, hogy két csúcsot összekötő szakasz a test belsejében halad! A keresett valószínűségek számíthatók klasszikus valószínűségi mező segítségével? Mit jelent ez, mit kell ilyenkor összeszámolni?

III. Határozd meg az összes esetek számát az a) és a b) esetben is! Számítsd ki, hányféleképp lehet két csúcsot, illetve két élet kiválasztani. Az a) esetben használd ki, hogy a kedvezőtlen esetek épp a test élei! A b) esetben azt kell megmondani, hányféleképp lehet közös csúcsú éleket kiválasztani. Ha ezt egy csúcsnál kiszámolod, elég a csúcsok számával megszorozni.

IV. Tedd fel ezt a két kérdés tetszőleges egy más test esetében is! Mennyiben volt speciális ez a test, miért volt könnyű itt a számolás? Tudod általánosítani a második válaszodat tetszőleges test esetére?

6. feladat

I. Rajzold be a grafikon megadott pontjait egy koordináta-rendszerbe! Mit jelent az, hogy másodfokú egy függvény?

II. Milyen hozzárendelési szabálya van egy másodfokú függvénynek? Milyen adatokat kell kiszámolni, hogy megkapjuk a függvényt? Itt több válasz is lehetséges. Melyikkel legegyszerűbb számolni?

III. Írd fel egy- egy egyenlőséggel, mit jelent az, hogy egy $y = ax^2 + bx + c$ hozzárendelési szabályú másodfokú függvény megadott x értékeihez a három megadott y érték tartozik! Egy háromismeretlenes egyenletrendszert kapsz, oldd meg!

IV. Bármely y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát egyértelműen meghatároz három pontja? Meg lehet-e adni három pontot úgy, hogy ne legyen megoldás?

7. feladat

I. Milyen szorzattá alakítási módszereket ismersz? Gondold át, melyeket lehet itt alkalmazni!

II. Az $a^3 - b^3$ és az $a^2 - b^2$ azonosságokkal egyaránt elindulhatsz. Melyikkel tudsz továbblépni? Bonts tovább, amíg tudod használni valamelyik azonosságot a kettő közül!

III. Egyetlen negyedfokú tényező maradt, $\left(x^4 - x^2 + 1\right)$, próbáld kivonással kiegészíteni teljes négyzetté! Megfelelő kivonással $a^2 - b^2$ ismét alkalmazható. (Ne ijedj meg a négyzetgyöktől...)

IV. Vizsgáld meg az eredményt! Ha a II. lépcsőben megadott másik azonossággal indulnál el a bontással, akkor bizonyos tényezőket nem lehetett tovább bontani. A végeredmény ismeretében azokat is bontani tudod, érdekes felbontásokat kapsz! A III. lépcső eredménye is továbbgondolható: a módszerrel minden $x^4 + px^2 + q$ alakú negyedfokú kifejezést másodfokú tényezőkre bonthatsz.

8. feladat

I. Lehetséges-e, hogy minden vágást a rácsvonalak mentén kell megtenni? Próbálkozzál!

II. Mekkora legyen a keletkező egyetlen négyzet x oldala? Számolj a területből! Ne ijedj meg a négyzetgyöktől :)

III. Elvágva az eredeti síkidomot, derékszögei elforgatva „összepasszolnak”. Tehát derékszögű háromszögek átfogójaként meg lehetne valósítani az előbb kiszámolt x négyzetoldalt. Keress olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói egészek, átfogója pedig x egységnyi! Ha le tudsz négy ilyen háromszöget vágni, szinte készen vagy, mert az x átfogók lesznek az átdarabolással kapott négyzet oldalai.

IV. Figyeld meg, hogy a megadott síkidom egy 5x5-ös és egy 3x3-as négyzetre is feldarabolható! Két más méretű egész oldalú négyzetet egymás mellé „forrasztunk”. Ezzel a síkidommal is feladhatjuk ugyanezt a feladatot? Kísérletezz, következtess!

9. feladat

I. Szerkessz koordináta-rendszert! Szerkeszd bele a körközéppontokat! Vázlatosan rajzold meg, körülbelül hogyan helyezkedik el a keresett két kör!

II. A metszéspontokat nem ismerjük, de tudunk olyan geometriai transzformációt, mely egyik pontot a másikba viszi. Mi ez a transzformáció? Alkalmazd a transzformációt az x tengely egyenesére!

III. Az előbbi módszert (x tengely tükrözése az O_1O_2 egyenesre) utánozd számítással is. Egy egyenes tükörképe két pontjának tükörképével megadható. Írd fel a metszéspontok koordinátáit, s a keresett körök egyenletét.

IV. Figyeld meg, hogy egy transzformációval megoldható szerkesztési feladatot meg tudunk oldani számolással, ha utánozzuk a szerkesztést. Az eltolás, középpontos tükrözés és az elforgatások közül melyiket lehet egyszerűen utánozni? Ezzel az ötlettel készíts hasonló feladatot!

10. feladat

I. Ismerd meg a Wiles-Fermat - tételt! Behelyettesítő próbálgatással értsd meg, mit mond ki! Készíts ábrát a gúláról!

II. Írj x helyére valamilyen konkrét számot! Próbáld kiszámolni az y-t! Milyen geometriai tételeket használhatnál?

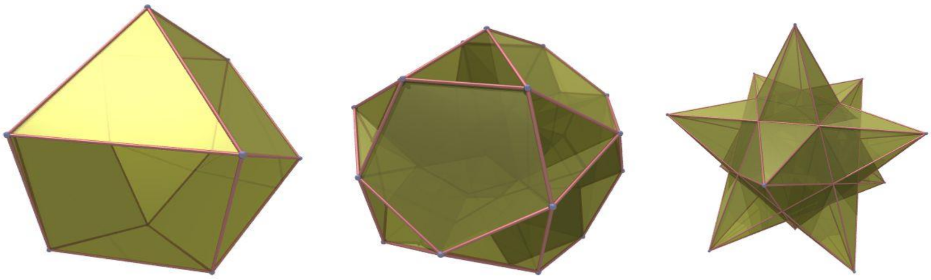
III. Figyeld meg, hogy a talpára és a csúcsára állított gúla esetén is az eredeti gúlához hasonló a levegő-gúla és a folyadék-gúla! A hasonló testek térfogatára vonatkozó tétellel összefüggést találhatsz x és y között. Ha x-et és y-t racionális alakba írod, ($x = \frac{p}{q}$ és $y = \frac{r}{s}$, ahol p, q, r, és s egész számok) átszorozva épp a Wiles-Fermat – tétel egy esetét kapod.

IV. Legyen általánosan egy talpára állított gúlában a magasság λ részéig a folyadék, a csúcsára állított gúlában μ részéig. Írj fel összefüggést λ és μ között! Milyen nevezetes tételhez hasonlít? Meg tudnád fogalmazni e térbeli tétel síkbeli megfelelőjét?

Pierre de Fermat Andrew Wiles

2. munkalap
Poliéderek, szabályos és féligszabályos testek

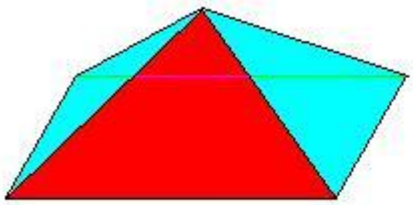
Ezen a munkalapon **poliéder**ekről lesz szó, azaz olyan testekről, melyeket sokszöglapok határolnak. A sokszögeket a test lapjainak, csúcsaikat a test csúcsainak, oldalaikat pedig a test éleinek nevezzük.



Minden poliédercsúcsban legalább három sokszög csúcsa találkozik , s a poliéder minden éle két-két sokszög közös oldala.

M11. Létezhet-e olyan poliéder, melyet tizenhét háromszöglap határol?

M12. Egy kisvállalkozó szabályos négyoldalú gúla alakú ajándéktárgyakat készít, s hat különböző színű festéket vesz, hogy a gúlákat befesse. Hány különböző színezésű gúlát készíthet, ha minden oldalt egyszínűre fest, és az élben szomszédos lapokat eltérő színűre festi? Két színezést azonosnak tekint, ha egyikből a másik megkapható elforgatás, mozgatás segítségével. (A szabályos négyoldalú gúla olyan poliéder, melynek egyik lapja négyzet, a többi négy éle pedig egyenlő.)



M13. Igazoljuk, hogy egy konvex poliédercsúcsnál találkozó szögek összege 360°-nál kisebb!

A konvex poliéderekre igaz Euler tétele: **Lapok száma + Csúcsok száma = Élek száma + 2** Röviden: **L+C=É+2** . Ez például a kocka esetében a 6+8=12+2 igaz egyenlőséget adja.

Egy poliédert akkor nevezünk **szabályos test**nek, ha lapjai egybevágó szabályos sokszögek, s bármelyik két csúcsánál "ugyanolyan fajta" szögek keletkeznek (létezik bármelyik csúcsot a belőle induló félegyenesekkel együtt bármelyik másik csúcsba vivő térbeli egybevágóság). Vizsgáljuk meg, ezek milyen testek lehetnek! Legalább három szabályos sokszögnek kell találkoznia egy csúcsban, s az egy csúcsban találkozó szögek összegének az M3 kérdés alapján 360°-nál kisebbnek kell lenni. Ezzel leszűkülnek a lehetőségek:

- A szabályos háromszög minden szöge 60° , ezért ha egybevágó szabályos háromszögekből készítünk szabályos testet, a test egy csúcsában három, négy vagy öt lap találkozhat. (Hat darab már M13-nak ellentmond!)

- A négyzet minden szöge 90^{o} , ezért a test egy csúcsában csak három négyzet találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)
- A szabályos ötszög minden szöge 108^{o} , ezért a test egy csúcsában csak három ilyen találkozhat. (Négy darab már M13-nak ellentmond!)
- Az ötnél több oldalú szabályos sokszög minden szöge legalább 120^{o} , ezért a test egy csúcsában M13 miatt még három sem találkozhat, kettő esetén pedig nem poliédert kapunk.

A lehetséges esetek tehát:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány sokszög találkozik
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

Nézzük az első esetet! Jelölje x a lapok számát! Ekkor az x darab háromszöglap csúcsainak száma $3x$, de egy csúcsban három lap találkozik, ezért ezt hárommal osztani kell, így kapjuk a poliéder csúcsai számát: x. Az x darab háromszöglapnak $3x$ darab oldala van, a poliéderben két-két háromszögoldal találkozik egy élben, ezért a poliéder éleinek száma: $\frac{3x}{2}$

Az Euler-tételbe a kapott képleteket beírva a következő egyenletet kapjuk: $x+x=\frac{3x}{2}+2$

Ennek megoldása $x=4$ .Tehát megkaptuk, hogy ha létezik a fenti táblázat első sorának megfelelő test, akkor annak négy lapja kell legyen. A fenti okoskodásból adódó képletek szerint a csúcsok száma is 4, az éleké pedig 6.
Ilyen test valóban létezik, a neve **szabályos tetraéder**.

M14: Számítsuk ki a fenti módon, hogy a táblázat többi sorában levő esetek hány lapú, hány élű és hány csúcsú testeket adnak!

Az alábbi eredmények jönnek ki, mindegyik kapott test létezik:

Hány oldalú szabályos sokszög	Egy csúcsban hány találkozik	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma	Név
3	3	4	4	6	**szabályos tetraéder**
3	4	8	6	12	**oktaéder**
3	5	20	12	30	**ikozaéder**
4	3	6	8	12	**kocka (hexaéder)**
5	3	12	20	30	**dodekaéder**

E testeket **platoni testek**nek is szokták nevezni.

M15a gyűjtőmunka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot, mit jelképeztek régen e testek!

E testek sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egyik ilyen tulajdonságuk a **dualitás**.

M15b gyűjtőmunka: Mit jelent e testek esetében a dualitás? Mely testek duálisai egymásnak?

Igen érdekes e testek térbeli szimmetriáit vizsgálni.

M6: Hány olyan térbeli egybevágósági transzformáció van, mely egy dodekaédert önmagába visz? Ezek közt hány síkra vonatkozó tükrözés van?

Ehhez a témarészhez kapcsolódik az F5 feladat is.

Újabb testeket kaphatunk, ha megengedjük, hogy a lapjaik legalább kétféle szabályos sokszög közül kerüljenek ki, melyeknek oldalai ugyanakkorák, de a poliéder csúcsaira vonatkozó megkötést meghagyjuk. Ezeket a testeket **féligszabályos test**eknek vagy **arkhimédeszi test**eknek nevezzük. (Kivétel: prizmákra és antiprizmákra nem használják e kifejezést, pedig a fenti definíció igaz rájuk.) (Nevezik még a most definiált testek duálisait is féligszabályos testeknek - ezek bemutatása itt nem célom.)

M17a gyűjtőmuka: Keresd meg az elnevezés eredetét, gyűjts történeti anyagot e testekről!

M17b gyűjtőmunka: Milyen poliédereket neveznek prizmáknak és antiprizmáknak? Mi a Schäfli-szimbólum?

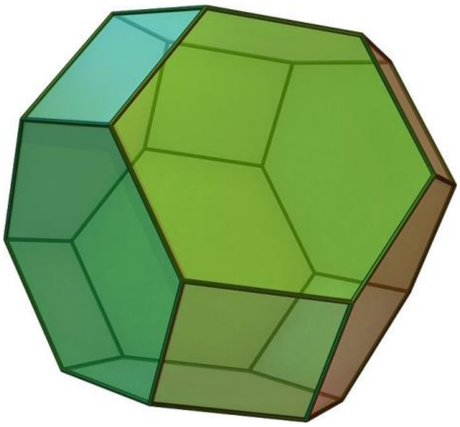
Szeretnénk egy olyan féligszabályos testet készíteni, melynek minden csúcsában két szabályos hatszög és egy négyzet találkozik. Számítsuk ki, hogy létezik-e ilyen test, s ha igen, hány négyzet és hány hatszög kell hozzá!

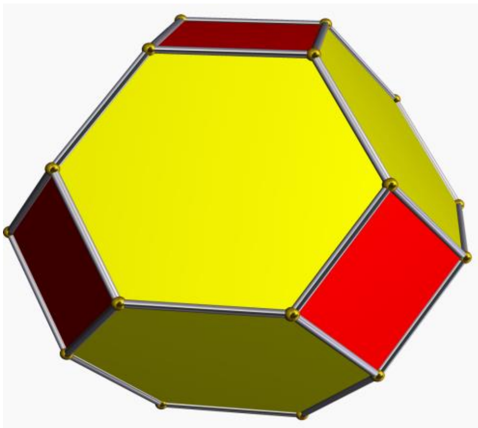
Jelölje x a szükséges négyzetek, y a hatszögek számát! A lapok száma $x+y$. A poliédercsúcsokat összeszámolhatjuk úgy, hogy a négyzetek összes csúcsainak számát tekintjük: $4x$, de úgy is, hogy a hatszögek összes csúcsainak számát elosztjuk kettővel, mert egy poliédercsúcsban két hatszögcsúcs "olvad össze": $\frac{6y}{2} = 3y$

A poliéderélek száma (mivel két-két sokszögoldal felel meg egy poliéderélnek) az összes sokszögoldal számának fele : $\frac{4x+6y}{2} = 2x+3y$. Ezután felírhatjuk az Euler-tételt és a csúcsok számára vonatkozó két képletet, így egy egyenletrendszert kapunk:

$$\left.\begin{aligned}&(x+y)+(4x)=(2x+3y)+2\\&4x=3y\end{aligned}\right\}$$

Az egyenlet megoldása x=6 és y=8. Tehát ha létezhet ez a test, 6 négyzetből és 8 hatszögből áll. A kapott eredmény csak szükséges feltétel (Tudjuk, hogy a féligszabályos testek körében az Euler-tétellel kapott szükséges feltétel elégséges is a létezéshez). Íme a test, neve csonka oktaéder:





M18: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezhet-e olyan féligszabályos test, melynek egy csúcsában 4 szabályos háromszög és 1 négyzet találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- és mennyi háromszöglapja lehet?

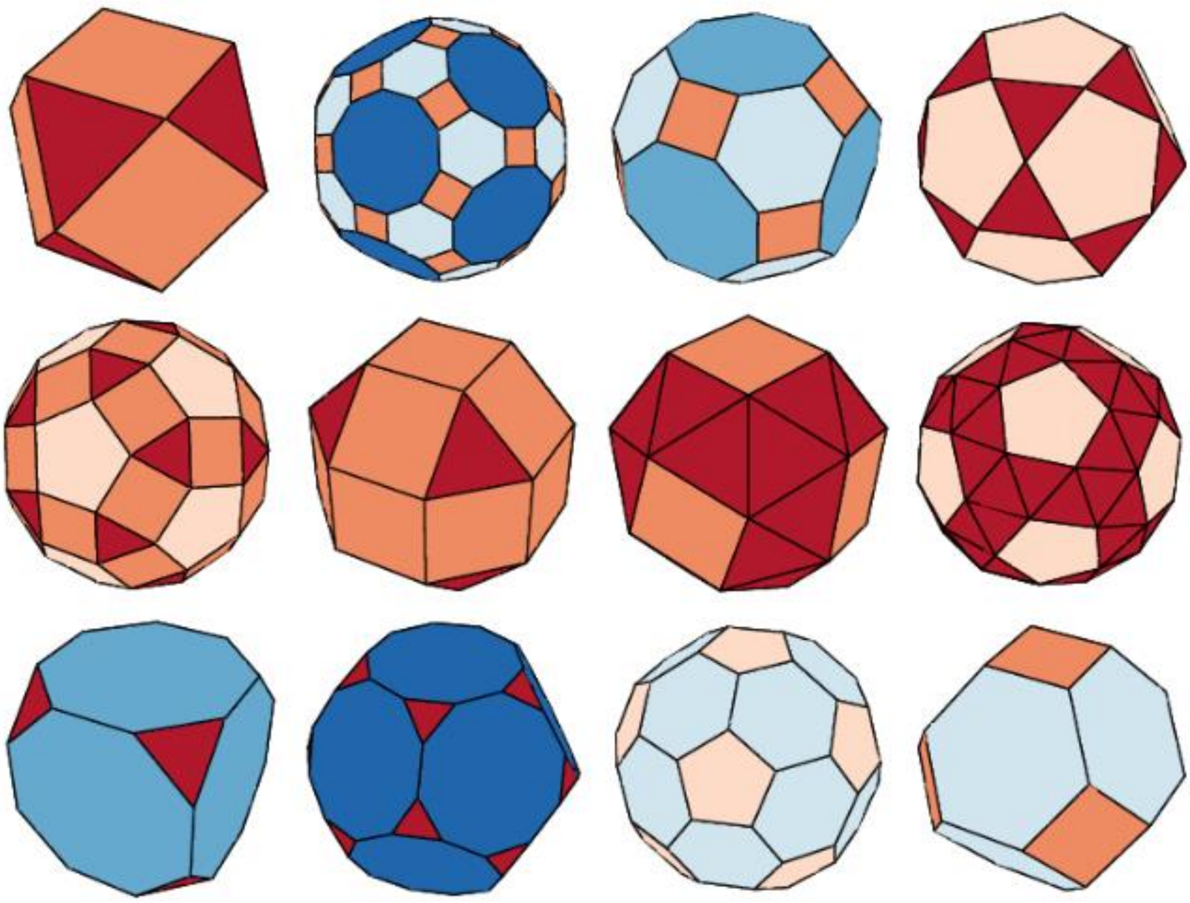
M19: Számoljuk ki az Euler-tétellel, létezhet-e olyan *féligszabályos test, melynek egy csúcsában 1 négyzet, 1 szabályos hatszög és 1 szabályos tízszög találkozik? Ha igen, mennyi négyzet- mennyi ötszög- és mennyi tízszöglapja lehet?*

M20: Keresd ki (akár a függvénytáblázatból) a szabályos testek beírt gömbjének sugarát, a felszínét és a térfogatát! Keress összefüggést e három adat között, általánosítsd és igazold a talált tételt!

Kapcsolódó anyagok, weboldalak:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Szab%C3%A1lyos_test

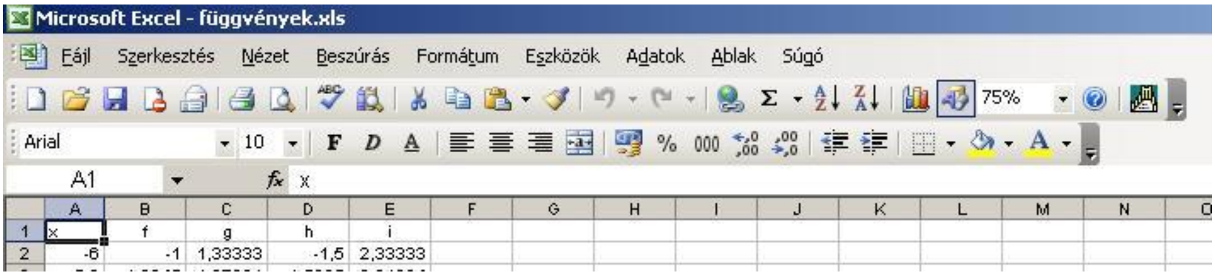
http://hu.wikipedia.org/wiki/Arkhim%C3%A9deszi_testek



3. munkalap

Excel-matek

Többször előfordult velem, hogy matematikai jellegű problémám akadt, melynél nem volt szükség a megoldás levezetésére, csak magára a megoldásra. Ilyen esetekben többször nyúltam informatikai eszközökhöz. Más alkalommal csak sokat kellett volna számolnom, s emiatt szorultam a számítógép segítségére. Az ilyen jellegű problémák esetén jól használható matematikai szoftver a Maple, a GeoGebra vagy a Derive, de ezeket fel kell tölteni gépünkre, s használatukat meg kell tanulni, hogy hasznukat vehessük. Néhány egyszerű problémában a jól ismert táblázatkezelő -esetünkben az Excel- is segíthet. Erről lesz szó ezen a munkalapon. Aki nem járatos az Excelben, a segédletek elolvasása után az is megpróbálkozhat a feladatokkal - nem is mindegyikhez kell számítógép!



I. Egy alkalommal diákoknak kellett geometriai feladatokat feladnom, s szerettem volna, ha egy háromszög oldalai egészek és a háromszög területe is egész. Az egyszerűség kedvéért ehhez két olyan derékszögű háromszöget kerestem, melynek oldalai egész számok s az egyik befogójuk egyenlő és páros.

- *M21a: Miért oldja meg a gondot két ilyen derékszögű háromszög?*
- *M21b: Vajon minden "egész oldalú" és egész területű háromszög előáll a keresett típusú két derékszögű háromszögből?*

Pitagorasz tételét alkalmazva pozitív egész megoldásokat kerestem az $a^2+b^2=c^2$ egyenletre. E feladat pozitív egész megoldásait **pitagoraszi számhármasok**nak nevezzük. Ismerem a módszert, ahogyan pitagoraszi számhármasokat kaphatok: veszek két pozitív egészet, melyet m-mel és n-nel jelölök, s úgy választom őket, hogy $m>n$ teljesüljön. A két befogót a következő két képlet adja: $\boldsymbol{a=2mn}$, továbbá $\boldsymbol{b= m^2-n^2}$, az átfogó pedig: $\boldsymbol{c= m^2+n^2}$

- *M22a: Igazoljuk, hogy az így felírt oldalhosszak valóban derékszögű háromszöget adnak meg!*
- *M22b: Mely m és n értékek esetén lesz a háromszög oldalhosszainak legnagyobb közös osztója 1?*
- *M23: Igazoljuk, hogy bármely 2-nél nagyobb pozitív egész szám szerepel befogóként valamelyik pitagoraszi számhármasban!*

Szerettem volna, ha az Excel kiszámol sok pitagoraszi számhármast. Az első két oszlopban szerettem volna a sorban következő m és n értékeket látni, az utána levő oszlopokban pedig az a, b és c háromszögoldalakat. Ehhez az m=2 és n=1 esetet beírtam, majd öt megfelelő képletet írtam az alatta levő sorba, aztán ezt a képletet a 101. sorig lemásoltam, így a képen látható táblázat keletkezett.

m	n	a	b	c
2	1	4	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	2	16	12	20
4	3	24	7	25
5	1	10	24	26
5	2	20	21	29
5	3	30	16	34
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	2	24	32	40

- *M24: Készítsd el az előző táblázatot! Az Excel következő részeit használd hozzá: alapműveletek, relatív hivatkozás, HA függvény. (Ha nem vagy tisztában ezek működésével, olvasd el az Excel-segítség fájlt!)*

- *M25a: Kerestess az Excel-lel olyan téglatesteket, melynek élei különböző n-nél kisebb egész számok és testátlója is egész! Legyen n=11 (Lásd az ábrát!).*
- *M25b: Hogyan függ n-től a szükséges sorok száma?*

	A	B	C	D	E
1	a	b	c	Testátló	Egész-e?
2	3	2	1	3,741657	nem
3	4	2	1	4,582576	nem
4	4	3	1	5,09902	nem
5	4	3	2	5,385165	nem
6	5	2	1	5,477226	nem
7	5	3	1	5,91608	nem
8	5	3	2	6,164414	nem
9	5	4	1	6,480741	nem
10	5	4	2	6,708204	nem
11	5	4	3	7,071068	nem
12	6	2	1	6,403124	nem
13	6	3	1	6,78233	nem
14	6	3	2	7	IGEN
15	6	4	1	7,28011	nem
16	6	4	2	7,483315	nem

II. Egy másik alkalommal harmadfokú egyenletet kellett volna megoldanom középiskolás szinten. Ehhez tudtam, hogy ha megtalálok egy gyököt, akkor eggyel alacsonyabb (tehát másod-)fokú egyenletre vezethetem vissza a feladatot. Ennek módszere a polinomosztás, amit itt bemutatok. Ha például a

$x^3 + x^2 - 72\,x + 180=0$

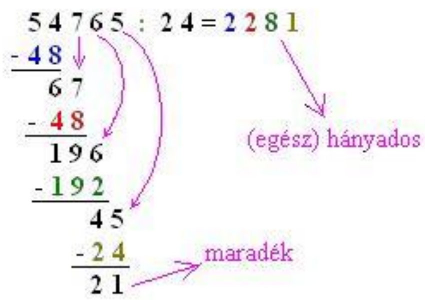
egyenletről feltételezzük, hogy három egész megoldása, van, akkor azok osztói kell legyenek a konstans tagnak.

- *M26: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinom minden együtthatója egész és három egész zérushelye (gyöke) van, akkor a konstans tagnak mindhárom gyök osztója!*

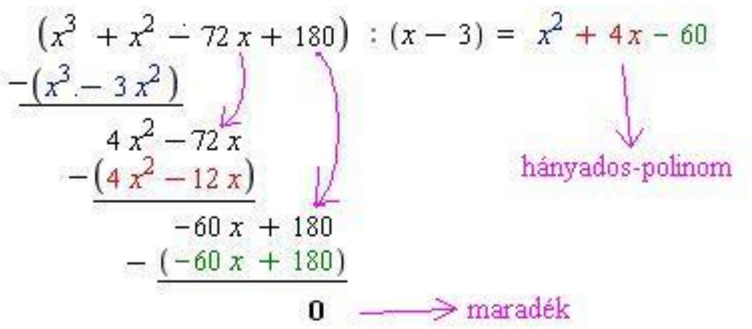
A fenti egyenlet esetén könnyen rábukkanhatunk az x=3 gyökre (az Excel segít ebben!). A polinom felírható kell legyen $(x\text{-}3)\cdot p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ egy másodfokú polinom.

- *M27: Igazold, hogy ha egy harmadfokú polinomnak gyöke g, akkor a polinom felírható $(x\text{-}g)\cdot p(x)$ alakban, ahol $p(x)$ egy másodfokú polinom!*

A feladat tehát az, hogy $x^3+x^2-72x+180=(x-3)p(x)$ alakba írjuk a polinomot. A polinomosztás módszere leolvasható a következő két ábráról, az általános iskolai írásbeli osztást kell utánozni, annyi különbséggel, hogy egy kapott hányadost mindig vissza kell szorozni és az osztandó megmaradt részéből le kell vonni. A polinomok esetében a hányados-polinom következő tagját mindig az osztandóból maradt rész és az osztó legmagasabb fokszámú tagjainak hányadosa adja:



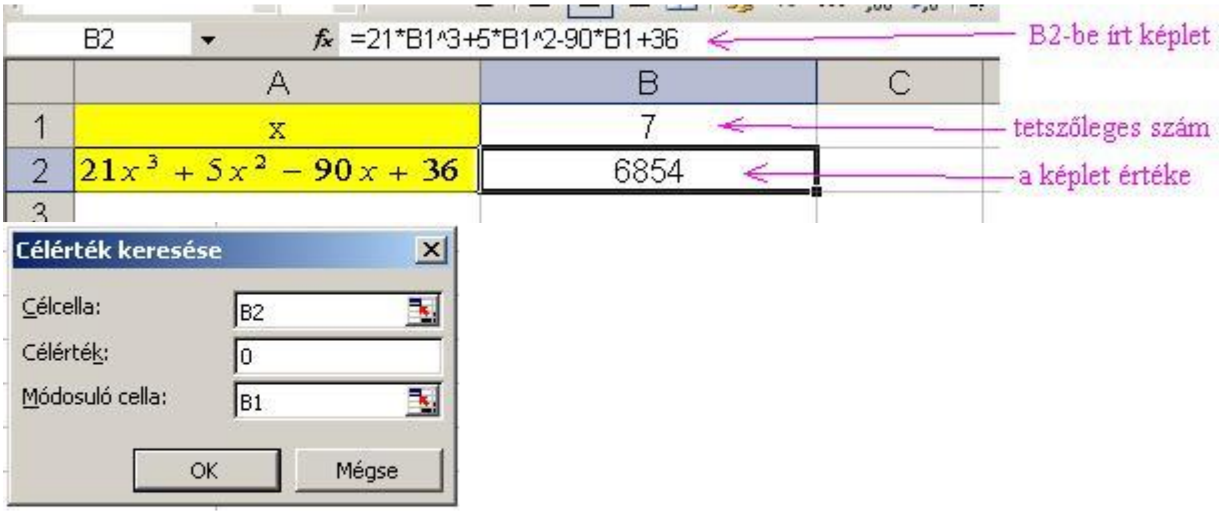
Ennek mintájára:



Ezekből következik, hogy $x^3+x^2-72x+180=(x-3)(x^2+4x-60)$, tehát egy másodfokú egyenletet kell már csak megoldani. A végső gyökök így: 3, -10 és 6.

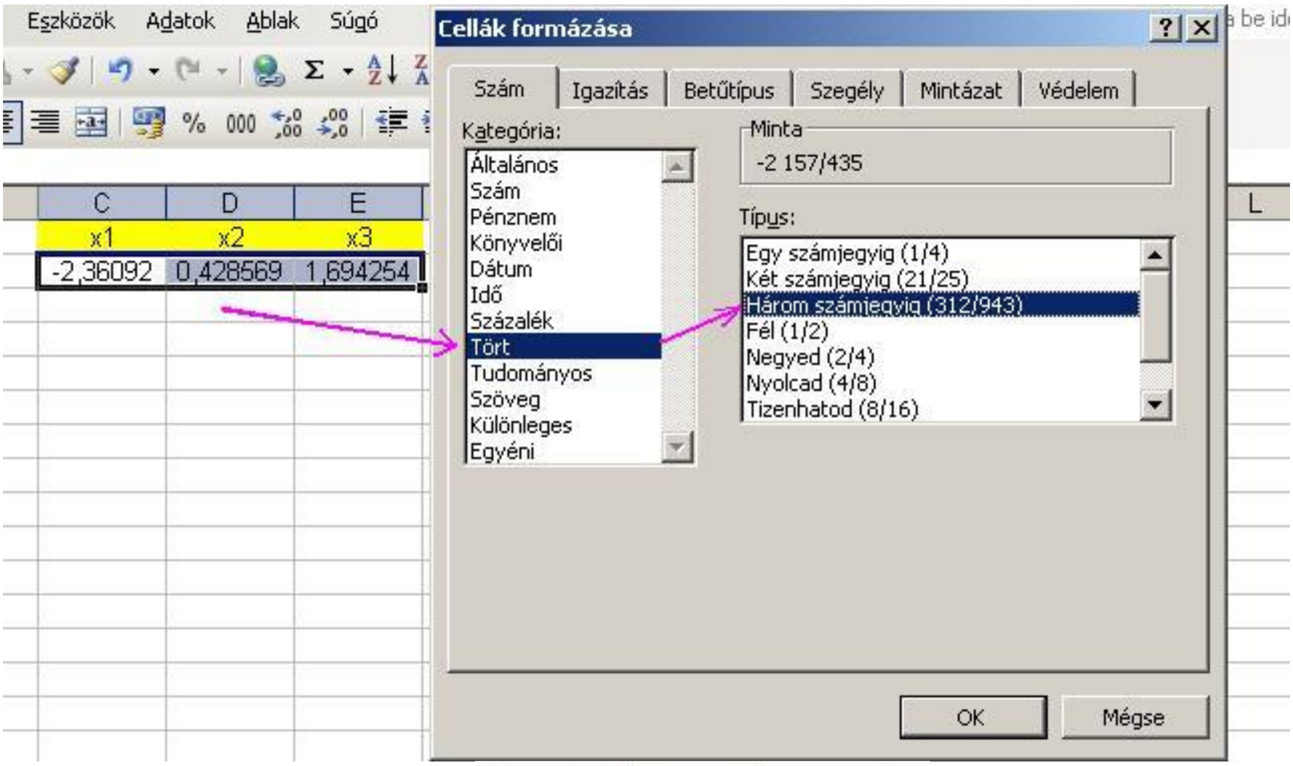
- *M28: Oldd meg az $x3+12x2-108x-1120=0$ egyenletet a fenti módszerrel!*

Bonyolultabb a helyzet, ha csak annyit tudunk, hogy egyik gyök racionális - esetleg több gyök nincs is. Legyen példánk erre a $21x^3+5x^2-90x+36=0$ egyenlet. Ilyen esetben nem használható az *M16* állítás. Bár ismert olyan állítás, mely szerint a racionális gyökök számlálója a konstans tagnak, a nevezője pedig a főegyütthatónak osztója, de ez egyrészt túl sok esetet ad, másrészt most alkalmat keresünk, hogy az Excel egy új lehetőségét ismerhessük meg. A célértékkereső Excel-eszközt fogjuk használni. A magasabbfokú egyenlet baloldalát úgy írjuk be egyik (pl. a B2) cellába, hogy az x ismeretlen minden előfordulási helyén ugyanarra (pl. a B1) cellára hivatkozunk. E cellába bármilyen adatot beírhatunk (akár 7-et is). Ezután az Eszközök menü Célértékkeresés menüpontját választjuk. Az ábra szerint töltjük ki a két cellát és a párbeszédpanelt:



Ha az OK gombbal elindítjuk a célértékkeresést, akkor az Excel megpróbálja a módosuló cellaként megadott cellában úgy változtatni a cella tartalmát, hogy a célcellában a célérték álljon a képlet eredményeként. (Ehhez persze az kell, hogy a célcella egy hivatkozást tartalmazzon, a módosuló cellára, vagy hogy a belőle induló hivatkozási láncban szerepeljen a módosuló cella.) Az Excel kereső algoritmusa akkor áll le, ha a a célértéket 3 tizedesjegy erejéig közelíti a módosuló cella értéke, vagy ha "reménytelennek ítéli" a gép a célérték elérését.
Ha a fenti adatokkal elindítjuk a célértékkeresést, akkor 1,69425492311333 értékkel áll le a gép. Ha 0-val indítjuk, akkor 0,428569468861206 értéket ad. Ha pedig -10 értékkel indul. akkor -2,36092105953484 érték jön ki. Ez a három gyök közelítő értéke. Lehet-e köztük racionális?

Bemásoltam a C2, D2, E2 cellákba a három eredményt, majd a három cellára cellaformázásként a számformátumon belül a törtformátumot választottam három számjeggyel:



Az eredmény:

C	D	E
x1	x2	x3
-2 157/435	3/7	1 302/435

A kapott három tört közül a 3/7 -ről behelyettesítéssel kiderül, hogy PONTOS gyök. Így polinomosztással adódik a következő: $21x^3+5x^2-90x+36=(7x-3)(3x^2+2x-12)$.

Tudjuk, hogy egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényező nulla, tehát a másodfokú tényező gyökeivel együtt a harmadfokú egyenlet PONTOS gyökei:

$$\frac{3}{7};\ \frac{-1+\sqrt{37}}{3};\ \frac{-1-\sqrt{37}}{3}.$$

- *M29: Oldd meg a* $78x^3-22x^2-211x+120=0$ *egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van racionális gyöke!*

- *M30: Oldd meg az* $55x^4+228x^3-528x^2-583x-756=0$ *egyenletet a fenti módon, ha tudjuk, hogy van legalább két racionális gyöke!*

4. munkalap

A Fibonacci-sorozat és az aranymetszés

A középkor egyik legtehetségesebb matematikusa volt Fibonacci (Szül. Pisa, kb. 1170 – kb. 1250, más nevein Leonardo di Pisa vagy Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci, Leonardo Fibonacci) olasz matematikus. Liber Abaci című könyvében említi a következő feladatot:

Nyulakat tenyésztünk a következő (elméleti) feltételek mellett:

- az első hónapban egyetlen újszülött nyúl-pár van;
- az újszülött nyúl-párok két hónap alatt válnak termékennyé;
- minden termékeny nyúl-pár minden hónapban egy újabb párt szül;
- és a nyulak örökké élnek?

Hány pár nyulunk lesz *n* hónap múlva?
A havonkénti nyúlpárok számát a következő sorozat mutatja:

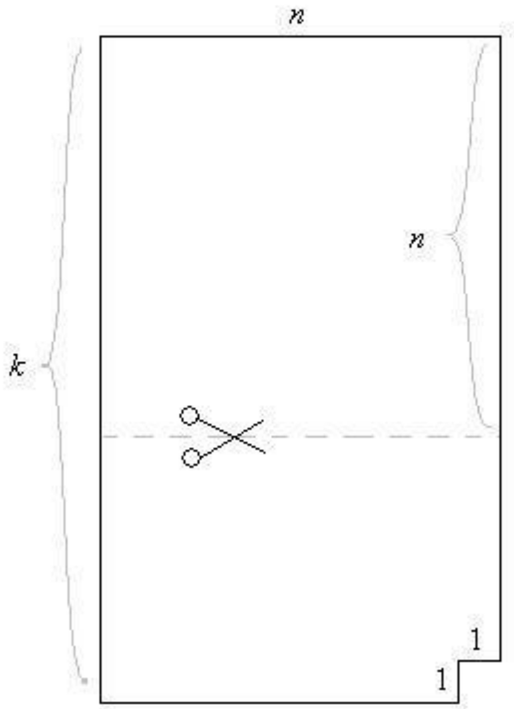
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Ezt az $\{F_n\}$ sorozatot nevezik Fibonacci-féle sorozatnak. A sorozatnak érdekes tulajdonságai vannak, a matematika számos területén felbukkan.

M31a: Igazoljuk, hogy a fenti Fibonnacci-féle feladat megoldása olyan F_n sorozat, melyet az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$képlet jellemez!

M31b: Hányféleképpen mehetünk fel egy 10 lépcsőfokból álló lépcsőn, ha egy lépésre egy vagy kettő lépcsőfokot léphetünk?

M32: Számoljuk ki és ábrázoljuk a Fibonacci-sorozat elemeit táblázatkezelő segítségével! Írassuk ki és ábrázoltassuk a sorozat első n elemének összegét és reciprok-összegét!



*M33a: Tekintsünk egynél nagyobb n és k egészeket, készítsünk egy n*k méretű téglalapot, melynek a bal alsó sarkából kivágunk egy 1*1-es négyzetet. Vágjuk le a téglalapból a lehető legnagyobb négyzetet a jobb felső saroktól kezdve! (Lásd az ábrát!) Ezután újra ugyanilyen módon vágunk a maradék téglalapból, addig folytatjuk, amíg a "csonka" téglalapot fel nem daraboltuk négyzetekre. Mely n és k értékek esetén keletkeznek csupa különböző négyzetek?*

M33b: Az iménti feladat eredményét felhasználva írjuk fel képletet az $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2$ összegre!

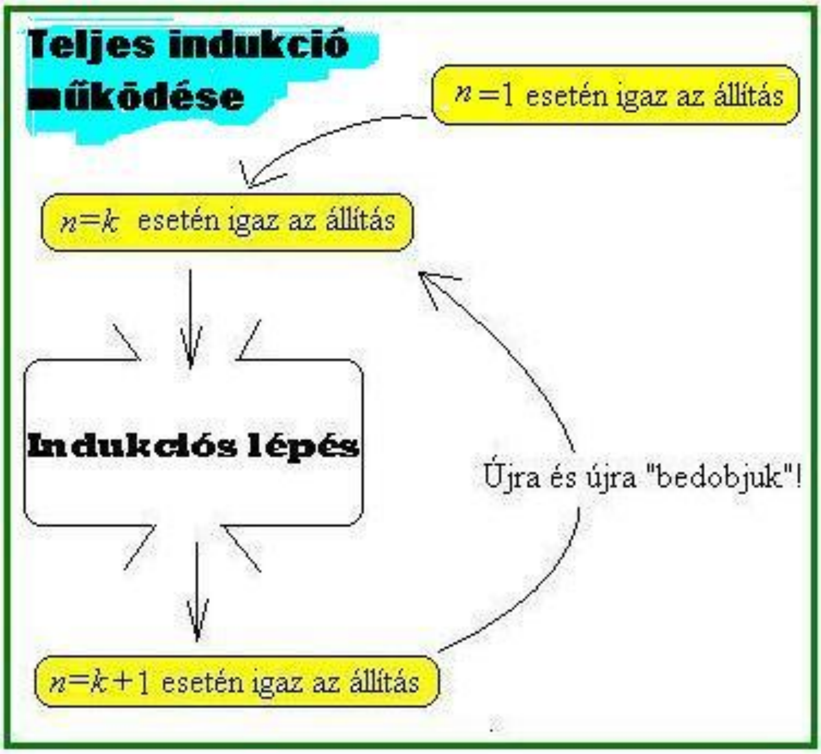
Sorozatokkal kapcsolatos (így a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos) állítások igazolásához is hasznos segítség a **teljes indukció** módszere. E módszert többnyire a pozitív egész számok halmazának egy végtelen részhalmazára tett állítások igazolására használják.

A Fibonacci-számokat vizsgálva például megfigyelhetjük, hogy:
1 = 2-1
1+1 = 3-1

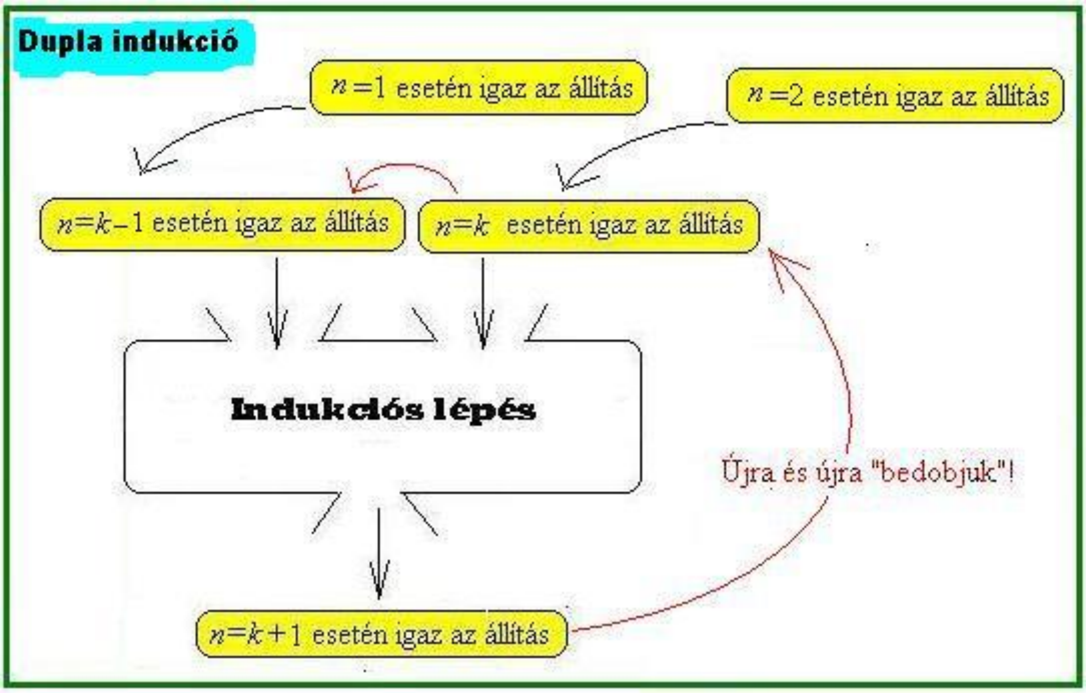
1+1+2 = 5-1
1+1+2+3 = 8-1
1+1+2+3+5 = 13-1
1+1+2+3+5+8 = 21-1
Megfogalmazódik az a sejtésünk, hogy
$F_1+F_2+\ldots+F_n = F_{n+2}-1$

Bemutatjuk, hogyan lehet ezt teljes indukcióval belátni. Az n=1; 2; 3; 4; 5; 6 esetekre fentebb megvizsgáltuk, hogy igaz az állítás.
Tételezzük fel, hogy $n=k$ értékig már igazoltuk a sejtést, és igaznak bizonyult. Ez azt jelenti, hogy $F_1+F_2+\ldots+F_k = F_{k+2}-1$ teljesül, ha $n=1; 2; 3; \ldots k$
Ezután e feltétel (indukciós feltevés) felhasználásával igazoljuk, hogy k+1 esetén is teljesül az állítás:
$F_1+F_2+\ldots+F_k+F_{k+1}=(F_1+F_2+\ldots+F_k)+F_{k+1}=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=(F_{k+1}+F_{k+2})-1=F_{k+3}-1$

Tehát ha valamely n számra teljesül az állítás, akkor ebből következik, hogy az n+1-re is igaz. E "bizonyítás-váz" bármely *n*-re elmondható, s úgy működik, mint egy gép:



A Fibonacci- sorozat esetében minden elemet két megelőző határoz meg, ezért számíthatunk rá, hogy bonyolultabb állítások igazolásához esetleg vissza kell menni még egy lépéssel a *k*-1. elemig. A második gép azt mutatja, hogyan megy a bizonyítás "dupla" indukcióval.



Erre a dupla indukcióra látunk egy példát egy mellékletben a következő helyen.

M34: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n | F_{2n}$

M35: Igazoljuk a következő állítást teljes indukcióval: $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$

Felvetődik a kérdés, hogy létezik-e olyan képlet, mellyel az *n* ismeretében a Fibonacci-sorozat *n*. elemét közvetlenül kiszámíthatjuk, azaz "megspórolhatjuk"-e valahogyan az összes előző elemek kiszámítását?
Ha az M35-ben szereplő képlet alapján dolgozunk, akkor kihagyhatunk elemeket, de így is ki kell számolni néhány elemet, s sok ügyeskedésre is szükség van.

M36: Számítsuk ki az M35 képletének felhasználásával, minél kevesebb közbülső elem kiszámításával az F_{99} *értékét! (Az első 10 elem értékét fentebb megadtuk.)*

Az M32 feladatot megoldva exponenciális függvényhez hasonló grafikont kaphattunk. Lehetséges, hogy a keresett képlet egy exponenciális függvény szabálya? Ha ez igaz lenne, akkor az *n*. elem *n*-edik gyöke mindig ugyanaz a szám lenne - az exponenciális függvény alapja.

Ha az Excellel kiíratjuk a $G_n = \sqrt[n]{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez csupa különböző eredményeket ad, de az *n*-et növelve egyre közelítenek egy értékhez. Lehet, hogy az exponenciális függvény egy konstanssal van szorozva, azaz egy mértani sorozatról van szó? Ez esetben két-két szomszédos elem hányadosa mindig megegyezne, s a kvóciens (*q*) értékét adná.

Ha az Excellel kiíratjuk a $H_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ sorozat értékeit, látjuk, hogy ez is csupa különböző eredményeket ad, de az *n*-et növelve sokkal gyorsabban közelítenek egy számhoz - ugyanahhoz az értékhez, mint az előbb!
Ezek szerint a Fibonacci-sorozat "kevéssé" tér el egy mértani sorozattól, melynek *q* hányadosa körülbelül 1,618.

Ha a sorozat elemeit $F_n=p.q^n$ alakban szeretnénk közelíteni, ez lehetséges az előzőek alapján, és p értéke is nagy pontossággal meghatározható.

M37a: Végezzük el az Excellel a most leírt három közelítést, adjuk meg az Excel pontosságával q és p értékét megfelelően sok sorozatelem alapján! Hány elem kell ehhez? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot!

M37b: Számítsuk ki a fenti p és q értékkel a $p.q^n$ sorozat elemeit! Kerekítsük az elemeket egészre! Melyik elemtől kezdve ad pontatlan értéket a Fibonacci-sorozat elemeire? Mellékeljük a megfelelő Excel táblázatot! Lehet a hiba oka az Excel pontatlansága?

Fordítsuk meg a kérdést! Ha egy $\{a_n\}$ sorozat $p.q^n$ alakú, teljesülhet rá az $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ képlet? (Nevezzük el ezt a képletet **Fibonacci-féle rekurzió**nak!)

Ez a következő egyenlőséget adja: $p \cdot q^{n+1} = p \cdot q^n + p \cdot q^{n-1}$

Osszuk el mindkét oldalt $p.q^{n-1}$ -nel! q-ra nézve másodfokú egyenlőséget kapunk: $q^2=q+1$. Két megoldása van:

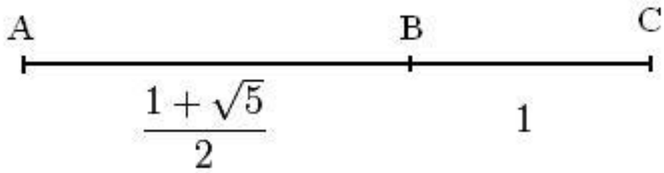
$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

M38a: Mutassuk meg, hogy minden $a_n = x \cdot q_1^{\,n} + y \cdot q_2^{\,n}$ alakú sorozatra teljesül a Fibonacci-féle rekurzió (ahol x és y tetszőleges valós számok)!

M38b: Keressük meg azt az x és y értéket, melyre teljesül, hogy az M38a-ban szereplő sorozatra $a_1=1$ és $a_2=1$!

Az *M38a*-ban igazolt tulajdonság miatt az *M38b*-ben talált sorozat azonos a Fibonacci-féle sorozattal, hiszen az első két elem megegyezik, s a rekurzió szerint minden elemet az előző kettőből ugyanaz a képlet számítja.

A fentebb megtalált $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ számnak több érdekes tulajdonsága van. Ha az alábbi ábra szerint egy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hosszúságú AB szakasz mellé teszünk egy egységnyi hosszúságú BC szakaszt, akkor a nagyobbik szakasz annyiszorosa a kisebbiknek, mint ahányszorosa az



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$$

együttes AC szakasz a nagyobbiknak. Ezt már az ókorban tudták, s azt mondták, hogy ebben az esetben az AC szakasz B osztópontja az **aranymetszési pontjában** van. Egy AC szakasz ilyen arányú felosztását az ókor óta harmonikus, esztétikai értékeket hordozó tökéletes arányként tartják számon. Ez az arány az állat- és növényvilágban is számos formában megjelenik. Sok művész tudatosan alkalmazza az irodalom és a zene területén is, bizonyított tény, hogy több zenemű, költemény aranymetszési pontjában van a mű fordulópontja. Találkozhatunk vele a geometria területén belül is, például a szabályos ötszögben.

M39: (kutatómunka) Gyűjts történeti anyagot az aranymetszésről! Hol jelenik meg az egyes tudományokban, a művészetekben, a természetben?

M40: Igazold a Fibonacci-sorozat M38b-ben megtalált zárt képlete alapján, hogy a Fibonacci-féle számok megkaphatók úgy, ha egészre kerekítjük a következő sorozat elemeit:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

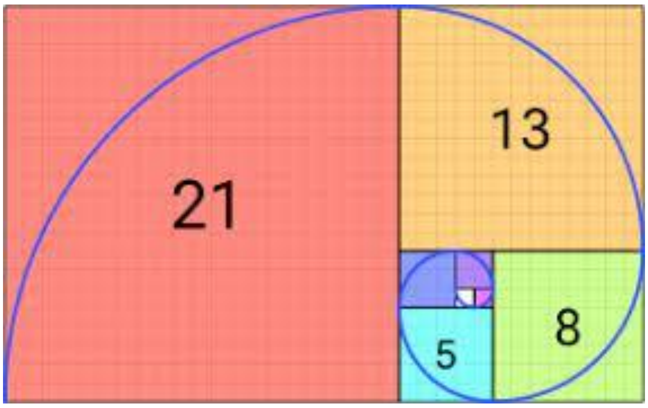
Az eddigiek alapján megállapíthatjuk, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos elemeinek hányadosai egyre pontosabban közelítik az aranymetszés számát. Ha tehát például olyan verset szeretnénk írni, melynek fordulópontja a vers aranymetszési pontjában van, akkor ezt könnyen megtehetjük, ha úgy intézzük, hogy a vers fordulópontja előtti és utáni sorainak száma két szomszédos (lehetőleg nagy) Fibonacci-szám legyen.

Sok sikert hozzá!

Kapcsolódó linkek:

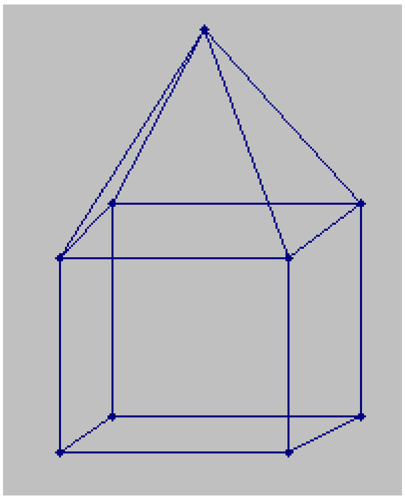
Fibonacciról

Érdekességek a Fibonacci-sorozatról



5. munkalap

Építsünk házat!

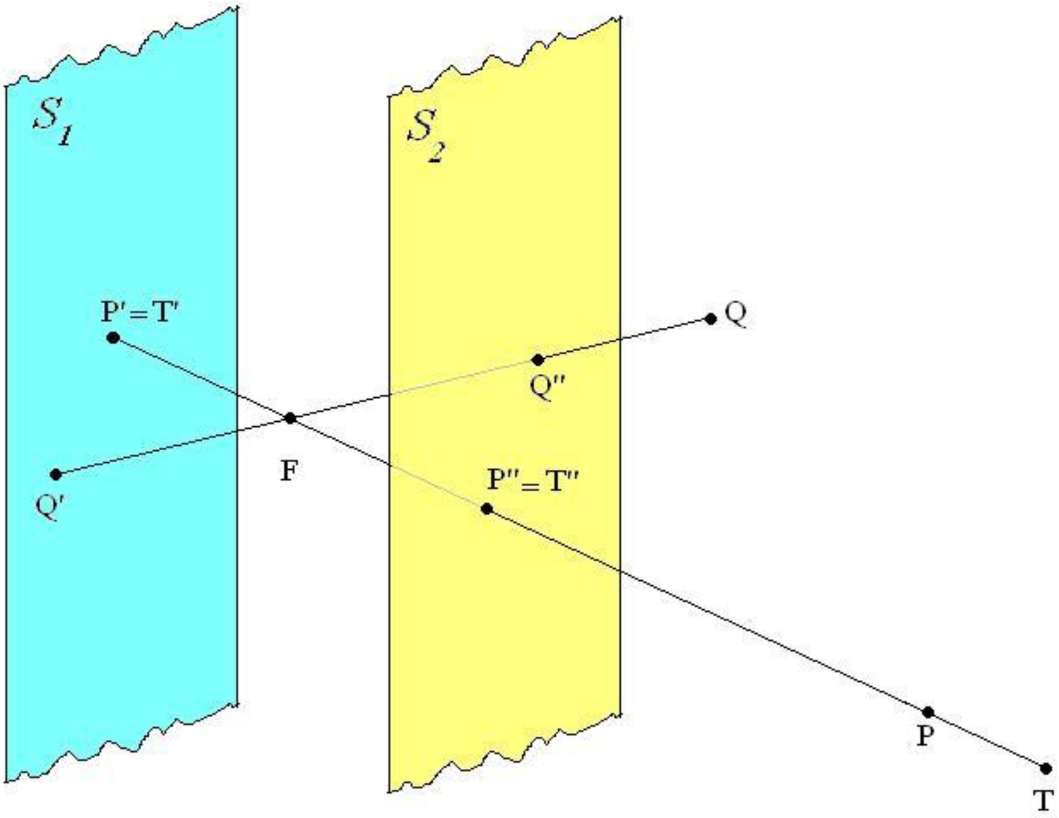


Biztosan játszottál már olyan játékszoftverrel, amelyben térbeli testek között mozoghattál, szobákban, épületek között járkálhattál, s a képernyő "valóságosan" mutatta, mit látsz éppen. Hogyan lehet egy térbeli alakzat képét síkban megjeleníteni, kirajzolni, hogy az "élethű" legyen? Erről szól ez a munkalap. (Megértéséhez a síkbeli koordinátarendszer ismeretére és a vektorok alapvető ismeretére van szükség.)

Az élethű ábrázolás jelentse most azt, hogy olyan képet ad egy testről, mint amit a szemed alkot róla. A fényképezőgép alkotta síkbeli kép is azért élethű, mert a szem képalkotását utánozza. Ennek modellezéséhez tehát először tehát a szem (a fényképezőgép, a tükrök, stb) képalkotásával érdemes megismerkedni.

Erről szól a Fizika tehetséggondozás második feladatlapja.

Hogyan keletkezik a kép a szemünkben? Tekinthetjük úgy, mintha minden térbeli P pontot egy vászonra vagy a szem esetében a retinára vetítenénk - matematikai értelmezéssel egy S síkra vetítünk, a szemlencse F fókuszpontján és a P ponton átmenő egyenessel. Egy P pont képe tehát úgy keletkezik az adott S síkon, hogy a rögzített F ponton átmenő PF egyenesnek tekintjük az S síkkal való döféspontját, ez a P pont P' képe.



Az ábrán egy P, egy Q és egy T pont vetített képét láthatjuk. Ha e pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_1-gyel jelzett síkon keletkezik a képük: P', Q' és T'. (F modellezheti itt a szemlencse fókuszpontját, S_1 modellezheti a retinát a szemben). Az S_1 síkon fordított állású képet kapunk. Az ábrán szemléletesen is megjelenik, hogy helyet cserél például a "fent" és a "lent". Ha azt az S_2 síkot tekintjük, mely S_1-gyel párhuzamos, és F-től ugyanolyan távolságra van F "túloldalán" (vagyis e sík S_1-nek F-re vonatkozó tükörképe), akkor az e síkon kapott kép azonos (azaz egybevágó) az S_1-en keletkező képpel, de "egyállású" az eredetijével. Az ábrán a P, Q és T pont esetén ha a pontokból érkező fénysugarak az F ponton áthaladnak, akkor az S_2-vel jelzett síkon a P", Q" és T" képük keletkezik. Ez a sík lesz megfelelő számunkra, hogy térbeli tárgyak síkbeli képeit megadjuk. (Az agyunk a retinára –azaz az S_1 síkra - vetített "fordított állású" képet úgy alakítja át, mintha az S_2 síkon kapott, "eredetivel egyállású" kép lenne.)

Megfigyelhető az ábrán az is, hogy P és T pontok képe egybeesik, mert F rajta van a PT egyenesen.

A következő feladatoknál az S_2 síkra történő vetítésre teszünk fel kérdéseket:

M41a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció egyenestartó, azaz három egy egyenesre eső pont képe mindig egy egyenesre esik!

M41b: Igaz-e tetszőleges pozitív p érték esetén, hogy van olyan szakasz, melyre igaz, hogy képének hossza p-szerese az eredeti szakaszhossznak?

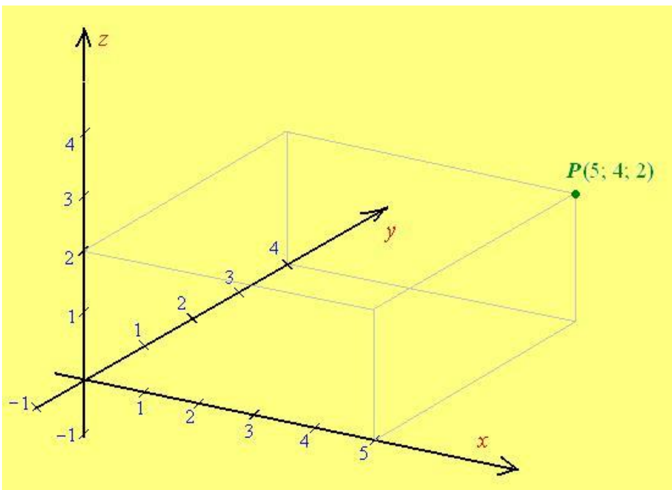
M42a: Igazoljuk, hogy a most megadott transzformáció nem aránytartó, azaz $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ *nem teljesül bármely A,B,C,D pont esetén!*

M42b: Adjuk meg olyan feltételt az A, B, C, D pontokra, melynek teljesülése esetén $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$ *mindig igaz!*

M43a: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, mely feleakkora területű, mint a képe!

M43b: Adjunk meg olyan térbeli háromszöget, mely kétszer akkora kerületű, mint a képe!

Vannak olyan pontok is, melyeknek nincs képük, ezekről később esik szó. A most tárgyalt transzformációt a geometriában **centrális projekció**nak nevezik, de nevezhetjük magyarul akár „ponton át síkra vetítésnek” is.



A megfelelő transzformáció tehát megvan, de hogyan lehet térbeli pontokat egy számítógépnek megadni? A legegyszerűbb: térbeli koordináta-rendszerrel. Az általános iskolában tanult síkbeli *xy*- koordináta-rendszerhez vegyünk fel egy harmadik tengelyt, vagyis egy "z" számegyenest, mely az *xy* síkra merőleges, ugyanolyan skálázású, mint a két eddigi tengely (ugyanakkora rajta az egység), s áthalad az origón. Egy térbeli P pontból mindhárom tengelyre merőlegest bocsátunk a térben, a merőlegesek talppontjai (a három számegyenesen ezek számok) adják (*x; y; z*) sorrendben a P pont három koordinátáját. Ezek ugyanazok a számok lesznek, mintha a P pont *yz*, *xz* és *xy* síktól vett előjeles távolságát tekintenénk (Lásd az ábrát).

<u>Hogyan lehet térbeli koordinátákkal számolni?</u>

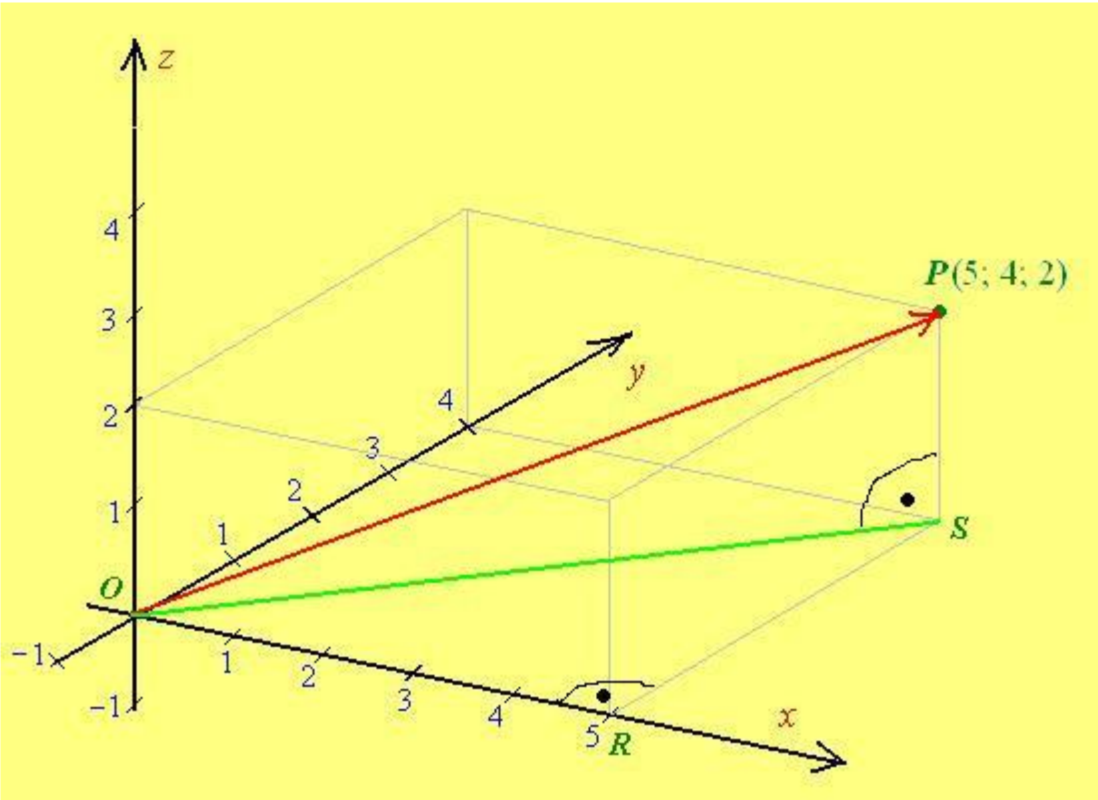
Szeretnénk egyenesekkel, síkokkal dolgozni, szeretnénk eltolást és elforgatást végezni. A legegyszerűbben helyvektorokkal lehet számolni. A helyvektorok origó kezdőpontú vektorok, tehát elég a végpontjuk három koordinátáját megadni, ha jellemezni akarjuk őket. Például az ábrán látható P pontba mutató helyvektor: **v**(5; 4; 2)

Ha egy pontot egy vektorral eltolunk, akkor koordinátánként össze kell adnunk a pont és a vektor koordinátáit. Például, ha az ábrán látható P pontot eltoljuk a **w**(3; 10; –8) vektorral. akkor a P'(8; 14; –6) pontot kapjuk.

Két pontot összekötő "szabad" vektort úgy kaphatjuk meg helyvektorként, hogy a vektor végpontjának koordinátáiból kivonjuk a kezdőpont koordinátáit. Például az A(3; 7; 11) és a B(10; –1; 6) pontok esetében $\overrightarrow{AB}$ = **u**(7; –8; –5).

Egy vektor „számszorosát” úgy kaphatjuk meg, hogy a vektor mindhárom koordinátáját megszorozzuk az adott számmal. Például a **v**(8; –4; 5) vektor másfélszerese (azaz 1,5-szerese) a **v’**(12; –6; 7,5) vektor. Ez **v**-vel egy egyenesbe eső helyvektor, de a hossza másfélszerese az eredeti vektorénak. A szorzószám lehet negatív is, ekkor a kapott vektor hossza ugyanúgy változik, mint pozitív lenne szorzószám esetében, de a kapott vektor az eredetivel ellentétes irányba mutat. Ha a szorzószám 0, akkor a végeredmény **v’**(0; 0; 0) =**0**, azaz nullvektor.

Ha egy térbeli vektor hosszát akarjuk meghatározni, például az $\overrightarrow{OP}$(5; 4; 2) vektorét, akkor



az ábrán látható OSR térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy OS= $\sqrt{5^2+4^2}$, majd az OSP térbeli derékszögű háromszögből kiszámolhatjuk Pitagorasz tételével, hogy OP= $\sqrt{OS^2+2^2} = \sqrt{5^2+4^2+2^2} = \sqrt{45}$ egység. Általánosságban mondhatjuk, hogy egy vektor hosszát megkapjuk, ha három koordinátájának négyzetösszegéből gyököt vonunk. Ez negatív koordináták esetén is igaz, hiszen a háromszögek oldalai pozitív számok, és egy számnak és az ellentettjének ugyanaz a négyzete. Könnyű kiegészíteni az okoskodást arra az esetre is, ha a vektornak van 0 koordinátája, a képlet akkor is helyes.

Ha két pont közti szabad vektorból helyvektort készítünk, majd a kapott vektor hosszát kiszámítjuk, megkapjuk az eredeti két pont távolságát.

A következő állítás is érdekes: Ha $\mathbf{a}(x_a; y_a; z_a)$ és $\mathbf{b}(x_b; y_b; z_b)$ vektorok egyike sem nullvektor, akkor merőlegességük szükséges és elégséges feltétele, hogy $x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0$ legyen. A bizonyítás a mellékletek között megtalálható – aki vektorok skaláris szorzatának fogalmát ismeri, annak számára persze ismert ez az állítás.

M44a: igazoljuk az eddigiek alapján: Ha egy S síkra az $\mathbf{n}_S(A; B; C)$ *(nem null-)vektor merőleges, és a sík egy pontja a* P_0 $(x_0; y_0; z_0)$ *, akkor a tér P(x, y, z) pontjai közül pontosan azok vannak az S síkon, melyekre igaz az* $Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ *egyenlőség.* **(I)**

M44b: Az eddigiek és az M44a alapján írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely áthalad a következő három ponton: A(10; 20; 0) , B(11; 7; 5) és C(20;2;2)

Az *M44a*-ban szereplő egyenlőséget az S sík egyenletének nevezzük, az $\mathbf{n}_S$ vektort pedig a sík (egy) normálvektorának. Ha a sík egyenletében *A*=0, akkor a sík párhuzamos[1] az *x* tengellyel, ha *B*=0, akkor a sík párhuzamos az *y* tengellyel, ha *C*=0, akkor a sík párhuzamos a *z* tengellyel. Ez abból adódik, hogy a leírt három esetben az $\mathbf{n}_S$ vektor merőleges egy megfelelő koordinátatengelyre.

Ha egy *P(x, y, z)* pont koordinátái két nem párhuzamos sík egyenletét egyszerre teljesítik, akkor rajta van a síkok metszésvonalán. Így felírhatjuk egy *e* egyenes egyenletrendszerét, ha két *e*-t tartalmazó sík egyenletét felírjuk.

Van egyszerűbb módszer is. Legyen egy e egyenes egy pontja P_0 $(x_0; y_0; z_0)$ és $\mathbf{v}_e(F; G; H)$ (nem null-)vektor párhuzamos az *e* egyenessel (irányvektora *e*-nek)! Ekkor az egyenes bármely P(*x*; *y*; *z*) pontjának három koordinátáját megkaphatjuk, ha P_0 pontot eltoljuk a $\mathbf{v}_e$ vektor „valahányszorosával". Jelöljük ezt a szorzószámot *t*-vel! Tehát az egyenesen levő P pontok három koordinátáját a következő képletek adják:

$$\begin{cases} x = Ft + x_0 \\ y = Gt + y_0 \\ z = Ht + z_0 \end{cases} \qquad \textbf{(I I)}$$

Ha *t* értékét tetszőlegesen változtatjuk, akkor a kapott *x*, *y* és *z* értékek mindig az *e* egyenes egy-egy pontjának három koordinátáját adják. A fenti három összekapcsolt egyenlőséget az egyenes egyenletrendszerének nevezzük. Könnyű belátni, hogy az egyenes összes pontja előáll a *t* érték megfelelő megválasztásával, *t*=0 esetén pedig épp a P_0 pontot kapjuk (mert nullvektorral toltuk el).

Keressük meg például az A(2; 5; 8) és B(10; –1; 6) pontokon átmenő egyenes egyenletrendszerét. $\overrightarrow{AB}$ helyvektorként felírva az egyenes egy irányvektora lesz: $\mathbf{v}_e(8;-6;-2)$ Az egyenesen levő P_0 pont legyen az A pont (lehetne ez akár a B is). Így az egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 8t + 2 \\ y = -6t + 5 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$$

[1] A „párhuzamos" szó ez esetben azt is jelentheti, hogy a sík tartalmazza a megfelelő tengelyt.

Ha például t értékét 5-nek választjuk, akkor $x = 42$; $y = –25$; $z = –2$, vagyis az e egyenesnek egy pontja Q(42; -25; -2).

A fenti egyenletrendszer mindhárom egyenletéből kifejezhetjük t értékét, s egyenlővé tehetjük egymással a kapott képleteket: $\frac{x-2}{8} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-8}{-2} \quad (= t)$ Az egyenes egyenletrendszerét ilyen alakban is meg szokták adni. Ehhez persze az szükséges, hogy az irányvektor egyik koordinátája se legyen 0 (mivel ezek a koordináták kerültek a három nevezőbe).

M45: Állapítsd meg a sík egyenlete és az egyenes egyenletrendszere segítségével kétféleképpen is, hogy egy síkba esik-e a következő négy pont: A(5; 1; –5) , B(7; 6; –8) , C(1; 3; 2) , D(–3;17; 10)

M46: Keresd meg a fenti egyenes következő tulajdonságú pontjait:

a) Rajta vannak az xy síkon

b) Az A ponttól négyszer olyan távol vannak, mint a B ponttól

c) Az origótól $\sqrt{237}$ egységnyi távolságra vannak

d) Az egyenesen levő pontok közül az origóhoz legközelebbi pont

M47: Egy síknak több **(I)** *alakú egyenlete, egy egyenesnek több* **(II)** *alakú egyenletrendszere van. Add meg, hogy egy síkegyenletből illetve egyenes-egyenletrendszerből hogyan kapható meg az összes többi!*

Most már eleget tudunk ahhoz, hogy kiszámíthassuk térbeli pontok síkbeli képét. Válasszunk egy síkot, amelyre vetítünk és válasszunk egy pontot, melyen keresztül vetítünk!

Legyen az S sík egyenlete $3x–5y+2z = 43$, a „vetítési” pont pedig az F(4; 1; –2) pont. Határozzuk meg a P(7; 2; 6) pont vetített képét az S síkon! Ehhez az FP egyenes és az S sík döféspontját kell meghatározni. Az $\overrightarrow{FP}$ vektor az egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_e(3;\ 1;\ 8)$ Az FP egyenes egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = t + 1 \\ z = 8t - 2 \end{cases}$$

A döféspont három koordinátája teljesíti az egyenes egyenletét, tehát oda beírva igaz egyenlőséget ad: $3(3t+4) - 5(t+1) + 2(8t-2) = 43$. Ezt megoldva $t=2$ adódik, tehát az egyenes egyenletrendszerébe visszahelyettesítve P’(8; 3; 14) a vetületi pont.

Az egyszerűség kedvéért választhatjuk S síknak a $z=1$ egyenletű síkot és F pontnak az origót. Ekkor a kapott képpontok x és y koordinátáit rögtön meg is jeleníthetjük egy síkbeli koordináta-rendszerben, s az a helyes látott képet fogja adni. Excelben elkészítettem egy olyan munkalapot, melynek térbeli pontokat lehet koordinátákkal megadni, az Excel kiszámolja a vetületi pontok koordinátáit, s a „*Pont(XY)*” grafikontípus segítségével „drótvázas” test képeként kirajzolja azt.

Arra kellett ügyelni, hogy az egymás után következő pontokat sorban köti össze az Excel szakaszokkal, azok x és y koordinátáiból álló cellapárokat kell megadni. A munkalaphoz tartozó Excel segédfájl bemutatja a *Pont(xy)* grafikon használatát.

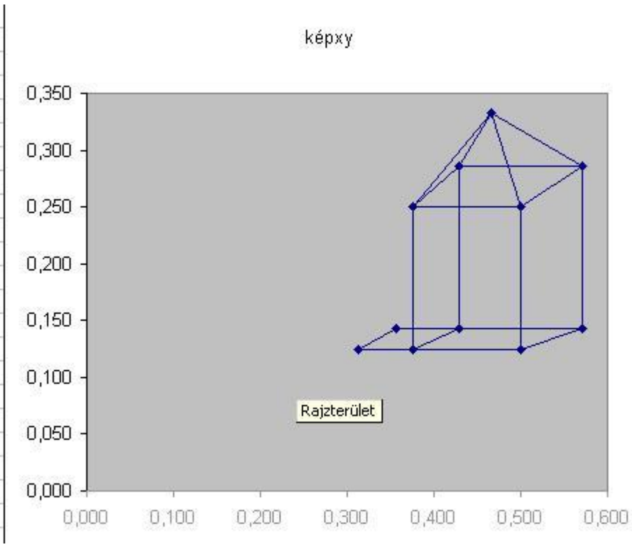
M48a: Készíts egy ilyen Excel munkalapot valamely egyszerű testről!

M48b: A fentiekben szerepelt, hogy bizonyos térbeli pontoknak nincs síkbeli vetített képük. Melyek ezek?

M49: Ábrázoltasd a P(10; 10; –10) és a Q(10; 10; 10) pontokat összekötő szakasz képét az Excellel! Tapasztalatod alapján javíts a munkalapod képletein úgy, hogy ne fordulhasson elő ilyen ábrázolás! („Rossz” helyen levő pontok esetében ne ábrázolja a gép a megfelelő pontokat, használd a HA() függvényt!)

M50: Készíts olyan Excel táblázatot mely összetettebb alakzat síkbeli képét mutatja! A táblázatot kiegészítheted plusz szolgáltatásokkal is (eltolás, esetleg elforgatás lehetősége).

	eltolás:		Vektor	20	0	20		
pontok	x	y	z	EltolX	EltolY	EltolZ	képx	képy
1	20	10	50	40	10	70	0,571	0,143
3	5	10	50	25	10	70	0,357	0,143
4	5	10	60	25	10	80	0,313	0,125
6	20	10	60	40	10	80	0,500	0,125
1	20	10	50	40	10	70	0,571	0,143
7	20	20	50	40	20	70	0,571	0,286
8	10	20	50	30	20	70	0,429	0,286
2	10	10	50	30	10	70	0,429	0,143
5	10	10	60	30	10	80	0,375	0,125
9	10	20	60	30	20	80	0,375	0,250
10	20	20	60	40	20	80	0,500	0,250
11	15	25	55	35	25	75	0,467	0,333
8	10	20	50	30	20	70	0,429	0,286
9	10	20	60	30	20	80	0,375	0,250
11	15	25	55	35	25	75	0,467	0,333
7	20	20	50	40	20	70	0,571	0,286
10	20	20	60	40	20	80	0,500	0,250
6	20	10	60	40	10	80	0,500	0,125



Az ábrán egyszerű ház látható egy lábtörlővel. Mintha fénykép lenne! A kész rajzon megfigyelhető, hogy az z tengely irányába eső párhuzamosok „összetartanak”, az *x* tengely és y tengely irányába eső párhuzamosok pedig nem. Hogy miért? Érdemes elgondolkodni rajta, bár túlmutat e munkalap keretein...