



Szakmai beszámoló

az „Út a Tudományhoz” programon belül megvalósult UT-2020-0001 számú tanulói kutatásról

A kutatás címe: Középiskolás diákok segítése a Pitagorasz-tétellel kapcsolatos feladatokban a hibafigyelés módszerével

1. Elvégzett tevékenységek, eredmények

Iskolámban, a Premontrei Rendi Szent Norbert Gimnáziumban öt tanéven át dolgozott az *Út a Tudományhoz* program keretében egy-egy kutatócsoport, melyeknek matematika szakos tanárként én voltam a mentora. Az idei, 2020/2021-es tanévben négy tizenegyedikes tanítványom vállalkozott közös kutatásra: Purgai Mátyás, Szabó Kristóf, Vaspöri Vanda és Wellner Viktória, mindnyájan 11.A osztályos diákok.

2020 őszén nagy vonalakban megterveztük a kutatás tevékenységeit. Mivel tudtuk, hogy a pályázat elfogadásáról csak 2021 elején értesülünk, ezért tevékenységeinket úgy terveztük, hogy a legaktívabb munka a második félévben kezdődjön. Az eredeti ütemezést próbáltuk tartani, de a járvány alaposan megnehezítette a kutatás kivitelezését. Ennek ellenére tervezett tevékenységeink zömét megvalósítottuk valamilyen formában.

A novembertől kezdődő digitális oktatás lehetetlenné tette a kutatócsoport személyes találkozóit. Ekkorra már a kutató diákok az előző évek kutatásaival ismerkedtek, illetve feladatokat kerestek a megíratandó feladatsorhoz.

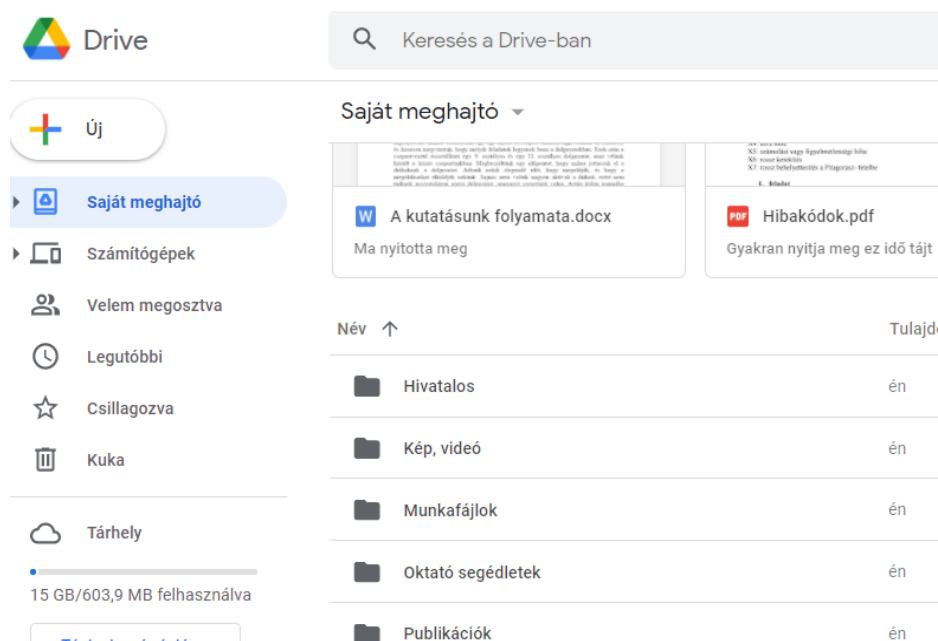
A kutatást a digitális rend két területen érintette: elmaradtak a kutatócsoport személyes megbeszélései és lehetetlenné vált a feladatlapok iskolában való személyes megíratása. Először meg kellett tehát szervezni a csoport kommunikációját. Egy Messenger csoportot hoztunk létre, ahol folyamatosan tudtunk kommunikálni – ez bizonyos szempontból hatékonyabb volt, mint a személyes megbeszélések, hiszen a nap 24 órájában bármikor tudtunk írni egymásnak, a

hátrány csak az volt, hogy a felvetett problémák megvitatása lassabb volt, hisz nem mindenki egyszerre nézett az üzeneteire. Ennek áthidalására rendszeres videochat-eket szerveztünk.

Igen szerencsés volt, hogy mind a négy tanuló ugyanabba a fakultációs csoportba járt, így a csütörtöki utolsó közös tanóránk után négyen ott maradtak a tanteremben, megbeszélést tarthattunk. A digitális oktatás időszakában az órarend változatlan maradt és a csütörtöki utolsó tanóránk online óraként volt megtartva – a négy kutató diák benn maradt a chat-ben, így hetente szinte ugyanolyan rend szerint tarthattunk megbeszéléseket.

Az eddigi kutatások vizsgálatainak alapja az volt, hogy iskolánk tanulói tanórákon megoldották feladatsorainkat – többnyire olyan tanórákon, amikor egy tanárt hiányzása miatt nem szakszerűen helyettesítettek. Az ötletünk az volt, hogy a digitális oktatás időszakában a tanulók otthon oldják meg a feladatsorokat, és lefotózva, név nélkül küldjék el nekünk. Ehhez kellett tehát előkészülni.

A Messengeren keresztül fájlokat cserélhettünk ugyan, de a kutatás lefolytatásához szükség volt egy mindannyiunk számára hozzáférhető nagyobb tárhelyre, valamint egy közösen használható e-mail fiókra. Egy közösen kezelt google-fiók egyszerre oldotta meg mindkét problémát.



Kilencedik és tizenegyedik osztályosokra terveztük a kutatást, emiatt két eltérő példasort akartunk készíteni. A kutató diákok mindegyike gyűjtött kilencedikeseknek és tizenegyedikeseknek való feladatokat. Gyűjtőmunkájuk eredményeképpen rengeteg feladatunk lett, ezekből végül négy-négy feladtból álló feladatsort készítettünk a két évfolyam számára.

A feladatsorok összeállításánál több szempontot is figyelembe vettünk. A kilencedikes és a tizedikes tananyagban egyre összetettebb feladatokban szerepel a Pitagorasz-tétel,

kilencedikben bonyolultabb ábrákban, körrel kapcsolatos feladatokban szerepel, tizedikben pedig olyan geometriafeladatokban, melyeket egyenletekkel lehet megoldani – a Pitagorasz-tételt ismeretlenekkel felírva itt első- vagy másodfokú egyenlet adja a megoldást. A tizenegyedikesek feladatai közé ilyeneket terveztünk. A kilencedikes feladatsor legfeljebb nyolcadikos ismereteket igényelt – kilencedikben még nem került sor a geometriai anyagrészre.

A tizenegyedikesek feladatsor első feladatát a Pitagorasz-tétel megfordításával lehetett könnyen megoldani – erre is kíváncsiak voltunk, hogy hányan dolgoznak így.

A kutatás kezdetén tanácskoztam Tóth László mérési szakértővel, a Pedagógiai Szolgáltató és Kutató Központ kutatójával, ő volt külső segítőnk az eddigi kutatásoknál is, munkámban tanácsokkal, javaslatokkal segített. Vázoltam az új terveket, melyeken néhány pontosítást tettünk.

A kutatócsoport vezetőjeként az ősszel két elméleti foglalkozást tartottam. Az egyikben ismerttettem a Pitagorasz-tétel szerepét és helyét a középiskolai tananyagban, a feladatmegoldásokban eddig tapasztalt hibákat részleteztem, a másikon pedig kutatómódszertani ismereteket adtam át a diákoknak, emellett elmondtam, hogy mely szoftverek hogyan segítenek majd a munkánkban.

Idén is azt terveztük, hogy a tanulói hibákat várhatóan jól kimutató feladatokat készítünk. Elmondtam, hogy tanárként a Pitagorasz-tételes feladatokkal kapcsolatban a szöveg alapján történő ábrakészítést, a derékszög felismerését és a befogó-átfogó keverését gondolom problémásnak. A kutató diákok ezeket a hiányosságokat kimutató feladatokat próbálták készíteni. Mind a négy diák gyűjtött feladatokat, ezekből válogattuk a végső megíratandó feladatsorokat.

Végül mindkét évfolyam négy feladatot kapott, féltünk, hogy a túl hosszú feladatsor elriasztja az otthon önállóan dolgozó tanulókat, a megoldást 20 perces időtartamra terveztük – ez körülbelül egy kis röpdolgozat időtartama. Szakértő külső segítőnk, Tóth László javaslatára már az előző tanévekben is kipróbáltuk, hogy semmilyen módon nem különböztetjük meg a nehezebb és a könnyebb feladatokat. Minden jelzés nélkül, de nehezedő sorrendben adtuk a feladatokat, ezáltal a tanulók munkatempójáról, a tudásszintjéről és több más tényezőről is információt várhattunk.

A digitális oktatás miatt interneten keresztül próbáltuk megíratni a feladatlapokat, ehhez a matematikatanárok segítségét kértük – online óráikon és egyéb kommunikációs csatornákon keresztül kérték meg a tanulóikat, hogy egy megadott email-címre küldjék el a közzétett feladatsorok megoldásait.

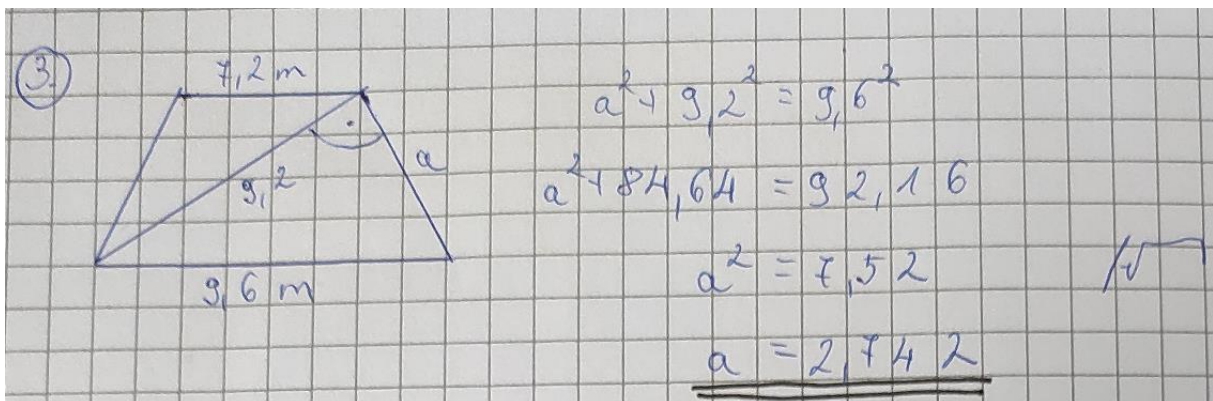
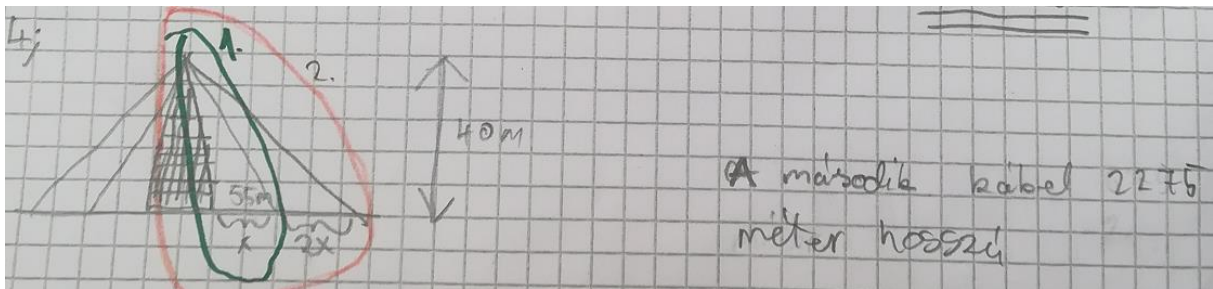
A feladatsort megoldó tanulókkal közöltük a következőket:

Arra kérünk, hogy oldj meg egy rövid feladatsort, megoldásaidat fotózd le és küldd el nekünk. A „dolgozatodra” **ne írd nevet**, csak azt írd fel, fiú vagy-e vagy lány! A megírt feladatsorodat teljesen bizalmasan kezeljük, a **matektanádod ezt nem látja!** Mi magunk se akarjuk tudni, kié a megoldás, minket csak az érdekel, milyen fajta nehézségeket, milyen hibákat mutatnak a beküldött megoldások.

A feladatok megoldásához csak számológépet és függvénytáblát használj, ne vedd igénybe semmilyen más segítséget! 20 perc idő áll rendelkezésedre.

A feladatlap több száz tanulóhoz jutott el, de sajnos, csak kevesen küldték be. Ennek több oka is lehet: mivel a tanulók matematikaórai pluszfeladatként kapták a kutatók feladatsorainak megoldását, a tanulók egy része szorgalmi feladatnak tekinthette, amit a jó tanulók szoktak kapni. Másrészt a kutatás alapfeltétele a névtelenség, emiatt a feladatlapot megoldó tanulók nem számíthattak személyes értékelésre, ugyanez miatt a matematikatanárok sem ajánlhattak fel pluszpontokat a megoldásaikra. A tanulók többsége motiválatlan volt – a kutatócsoport email-címére mindössze 50 tanuló küldte be feladatmegoldásait, 23 kilencedikes és 27 tizenegyedikes tanuló. A kutatás elején körülbelül kétszer ekkora létszámra terveztünk.

A név nélkül beküldött tanulói feladatmegoldásokat a kutató diákok kóddal látták el, majd javítani kezdték azokat. Ez nem hagyományos tanári javítás volt, hanem a kutató diákok a hibákat megfigyelték, adminisztrálták, majd típusokba próbálták sorolni. Többségüket könnyű volt kategorizálni, ám akadtak olyan hibák is, melyek vitákat váltottak ki, némelyik hibának új kategóriát kellett felvenni. Voltak egyes feladatokra specifikusan jellemző hibák, illetve olyan hibák is, melyek csak a tizenegyedik évfolyam feladatmegoldásaiban fordulhattak elő.



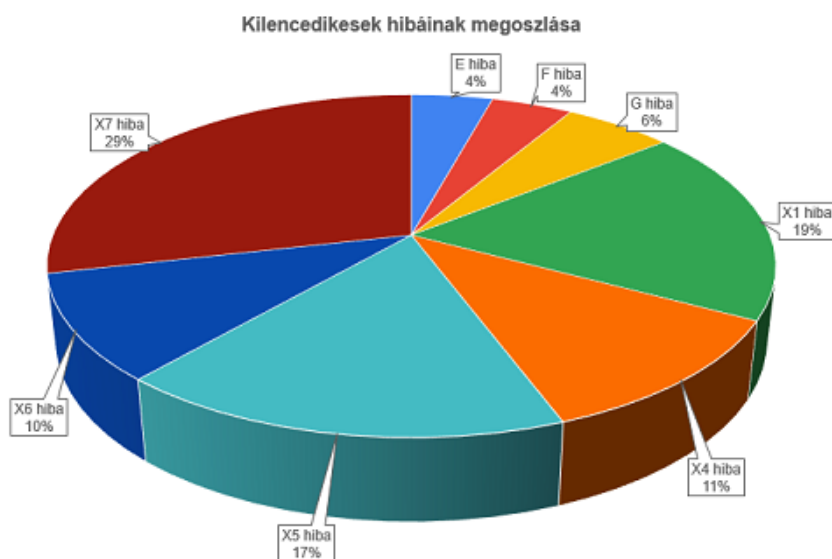
A kutatócsoport két részre vált: ketten a kilencedikes dolgozatokat, ketten a tizenegyedikes dolgozatokat vizsgálták, miközben a közös hibákkal és a hibakódokkal kapcsolatban folyamatosan kommunikáltak.

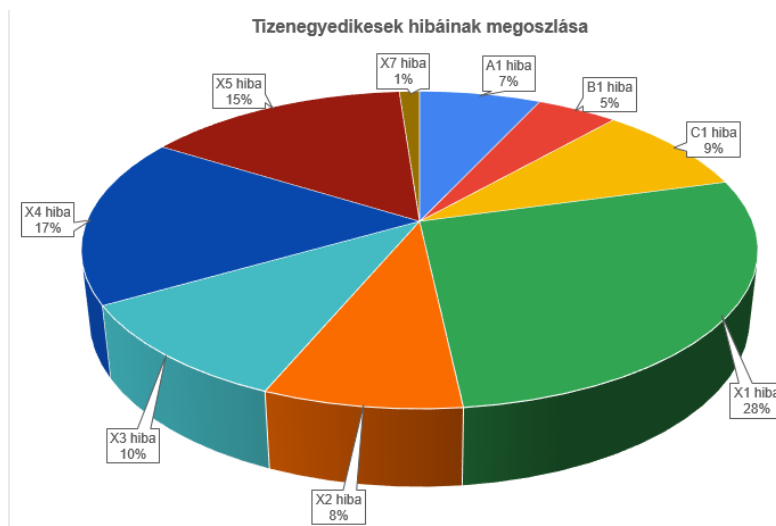
A hibákat idén is kódokkal jelöltük. A kutatók az egyes tanulók különféle típusú hibáinak mennyiségéből egy táblázatot készítettek. E munkaszakasz azzal zárult, hogy ez a táblázat, valamint kijavított és kódszámmal ellátott dolgozatlapok a közös internetes tárhelyen el lettek tárolva.

Hibakódok

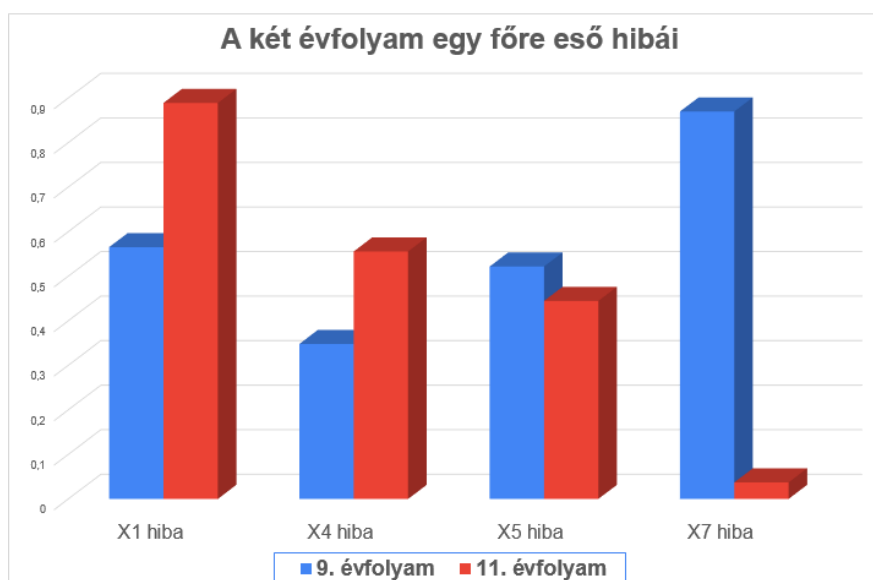
<i>Csak egy-egy feladatban előforduló hibák (9. évfolyam)</i>	
E	rombusz átló hiba (A rombusz átlói nem egyenlő hosszúságúak, ezért a második átlót nem lehet az első átló felének vagy kétszeresének számítani.)
F	mértékegység átváltási hiba
G	rossz képlettel való számolás
<i>Csak egy-egy feladatban előforduló hibák (11. évfolyam)</i>	
A1	Magasság tévesztése az oldalfelezővel
B1	Nem fejezte ki az oldalak hosszát
D1	Nem fejezte ki az átfogót
<i>Több feladatban előforduló, közös hibák:</i>	
X1	Értékelhetetlen feladat (nem írt semmit/teljesen rossz)
X2	Hibás összevonás/azonosság
X3	Derékszögű-háromszög tévesztése
X4	Ábra hiba
X5	Számolási vagy figyelmetlenségi hiba
X6	Rossz kerekítés
X7	Rossz behelyettesítés a Pitagorasz- tételbe (befogó-átfogó keverése)

Ezután a hibafajtákat és gyakoriságukat elemeztük a csoport tagjaival, ebben az Excel szoftver volt segítségünkre.



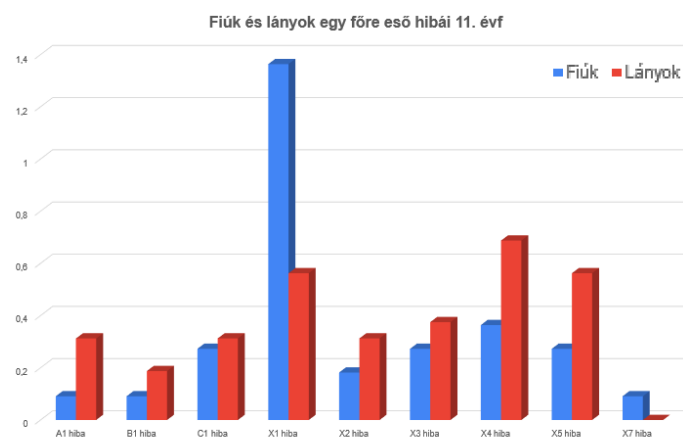
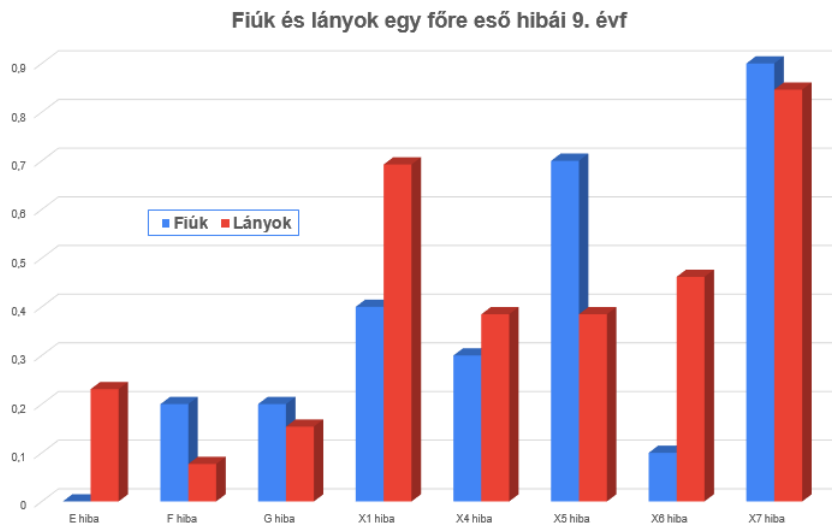


Az eltérő feladatsorok miatt a kilencedikesek és tizenegyedikesek hibáinak csak egy részét tudtuk összehasonlítani, az X1, X4, X5 és az X7 kódú hibákat.



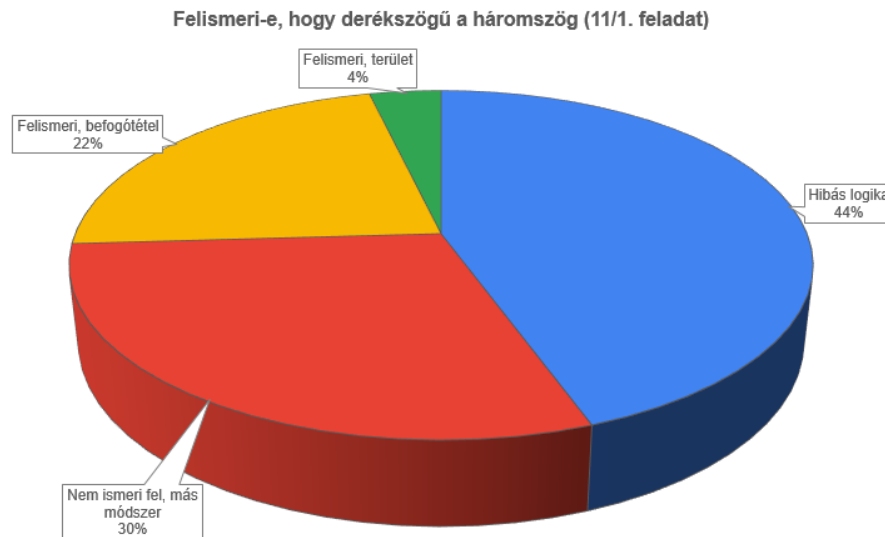
Meglepő volt, hogy kilencedikesben majdnem az átfogó és befogó tévesztéséből majdnem egy egész hiba esik egy tanulóra, addig a tizenegyedikeseknél ez a hiba elenyésző (konkrétan egyetlen ilyen hiba volt az egész évfolyamon). Jellemzően több a teljesen rossz gondolatmenet és az ábrából eredő hiba tizenegyedikesben – ez arra vezethető vissza, hogy az ő feladatsoruk eleve összetettebb feladatokból állt.

Az egy főre eső hibákat kiszámítottuk mindkét évfolyamon külön a lányok és a fiúk esetében. Itt is mutatkozott néhány eltérés.



A kilencedikeseknél a fiúknál nagyobb arányban fordulnak elő a figyelmetlenségből eredő hibák, a lányoknál a kerekítési hibák. Tizenegyedikben a lányoknál nagyobb arányban fordulnak elő a hibás ábrák, illetve a figyelmetlenségből eredő hibák.

Külön figyelmet fordítottunk a tizenegyedik évfolyam első feladatára, mely a Pitagorasztétel megfordításának felhasználásával és az általános iskolai területképlettel két sorban megoldható, de más módszerekkel is helyes eredményre lehet jutni.



Meglepő volt, hogy mindössze egy tanuló dolgozott az egyszerű módszerrel, a tanulók negyede felismerte, hogy a háromszög derékszögű, de a tizedikben tanult befogótétellel dolgoztak tovább. Körülbelül a tanulók harmada oldotta meg a feladatot a Pitagorasz-tétel „megkerülésével”, így a tizenegyedikeseknek több mint a fele valamilyen helyes módszerrel dolgozott.

A hibafajták megfigyelése és a leggyakoribb hibák feltérképezése után olyan fejlesztő segédleteket szerettünk volna készíteni, melyek használatával megelőzhetők a gyakori hibák. Emiatt újabb megbeszéléseket tartottunk, ahol az előző évek fejlesztő segédleteit néztük át. Ezek formáját megfelelőnek találtuk, a segédletek külső megjelenését és működését változatlanul akartuk hagyni. Megbeszéltük, hogy a Power Point szoftvernek milyen szolgáltatásait hogyan lehet használni, hogyan lehet elágazásokat létrehozni és kezelni a diavetítésben.

A hibavizsgálatok alapján interaktív Power Point segédleteket terveztünk melyek matematikai feladatokat adnak fel a velük dolgozó tanulónak, s egyesével rákérdeznek a megoldás lépéseire. A segédanyag olyan kérdéseket tesznek fel, melyekre több (A, B, C és D) válaszlehetőséget adnak, ezek közül kell kiválasztani a helyeset. Az egyetlen helyes válasz mellett levő hibás válaszokban az előzetesen megírt dolgozatok leggyakoribb hibái jelennek meg. Ha a segédlettel dolgozó tanuló hibás válaszlehetőséget választ egy kérdéshez, a számítógép automatikusan megmagyarázza, hogy mi a hiba a kiválasztott feleletben.

Fenti elvek alapján a kilencedikes feladatlapokkal foglalkozó két kutató diák a kilencedikesek számára, a tizenegyedikeseket vizsgáló két diák pedig az ő számunkra készített fejlesztő segédletet a leggyakoribb hibák figyelembevételével. A két fejlesztő segédlet

diavetítési fájlként található a kutatást záró CD-n, illetve némi csinosítás után szaktanári honlapomon is elérhető lesz.

Két dia a kilencedikes segédletből:

2. feladat

Egy vadász galambokra vadászik, és sikeresen elejti zsákmányát. Mekkora utat tett meg a puskagolyó, ha a vadász 50 m távolságra van a tetemtől, ami 25 méter magasról esett le pont függőlegesen?

Fontos, hogy megfelelő ábrát készítsél a feladathoz.

Kattints a helyes ábrára! =>

Sajnos nem ez a helyes ábra!

A kérdés az volt, hogy mekkora utat tett meg a puskagolyó a repülő galambig, de itt az x nem azt jelöli - hanem azt, hogy milyen magasról esett le a galamb.

[újra próbálok](#)

Két dia a tizenegyedikes segédletből:

Helyes válasz!

2. lépés

► Mít tennél ezután?

a.) Megnézném, hogy az alap háromszögben helyes-e Pitagorasz-tétele
 b.) Magasságtétellel számolnék
 c.) Elfólezem az AB oldalt, és Pitagorasz-tétellel számolok

Ha felírjuk a Pitagorasz-tételt, a következő jön ki:
 $8^2 + 6^2 = 10^2$
 $64 + 36 = 100$
 $100 = 100$

A háromszög derékszögű a C csúcsnál,
 így már ki tudjuk fejezni a területből a C-ből induló magasságot:
 $(6 \cdot 8) / 2 = (10 \cdot m_c) / 2$
 $24 = 5m_c$
 $4,8 = m_c$
 4,8 cm a keresett magasság.

Sajnos, a járványhelyzet miatt nem maradt idő a segédletek tesztelésre. Túl sokáig vártunk a megoldások beküldésére, a fent említett okok miatt még így sem gyűlt össze a tervezett mennyiségű feladatmegoldás.

A PSzK-val kötött megállapodásunk lehetővé teszi, hogy igény szerint a megye matematikatanárai előtt is bemutatjuk a kutatást, erre az iskolaév vége miatt szeptemberben kerülhet sor, ezt a régebbi érdektelenségre való tekintettel igényfelmérés fogja megelőzni.

Kutatásunkról többféle stílusban írtam beszámolót, zsnalisztikus stílusú cikk jelenik meg munkánkról több internetes újságban, egy cikk az iskolai évkönyvben, ez a részletes szakmai cikk pedig terveim szerint iskolánk honlapján, a megyei matematika szaktanácsadó kommunikációs lapján, a saját honlapomon, valamint a PSzK honlapján jelenik meg.

2. Megjegyzések a kutatás kapcsán

Miért van szükség erre a kutatásra? A középiskolai matematikaoktatásban eddig öt kutatást végeztünk (*Másodfokú egyenletek* témaköre, *Hatvány, gyök, logaritmus, a Trigonometrikus egyenletek* témaköre, a *Matematikai eszközhasználat hibái*, illetve a *Függvények* témaköre).

A Pitagorasz-tételről a középiskolásoknak már előismereteik vannak, mert nyolcadikban ez tananyag, sőt, a gyökvonás bevezetésénél is már fontos szerepet játszik. A tétel további alkalmazásai végigkísérik a középiskolásokat mind a négy évben. Kilencedikben oktatási cél a tétel direkt használata a legkülönbözőbb alakzatokban – speciális négyszögekben és körökben is. A Thalész-tétellel együtt alkalmazva új típusú feladatokat is meg tudnak oldani kilencedik végéig. A tizedikes tananyagban a gyökvonás témakörénél, az egyenletek témakörénél és a trigonometria alapjainál ismét előjön a Pitagorasz-tétel, tizenegyedikben a koordináta-geometria kapcsán, tizenkettedikben a térgeometriai résznél – elmondható, hogy egyre magasabb tudásszintekhez kapcsolódik – átszövi a középiskolai tananyagot. Emiatt volt hasznos két pillanatban (kilencedikben, amikor még csak az általános iskolai tudásra alapozhattak, és tizenegyedikben, amikor két tanévnyi középiskolai tudás megvan) vizsgálni a tanulók ebbéli hibáit.

Tizenkettedikben az érettségi ismételtnél a tanárnak megfelelő szintre kell hozni a tanulókat a Pitagorasz-tétel alkalmazásaiból. Ebben sokat segíthet a gyakori hibák ismerete, illetve egy olyan digitális segédlet, mely a hiányzó tudás megszerzését, felfrissítését szolgálja.

A kutatás nemcsak külső szempontból volt hasznos, hanem a négy kutató diák számára is. Amikor a kutató diákok közösen dolgoztak, az együttműködéssel kapcsolatos kompetenciájuk fejlődött, a feladatkészítés pedig komplex rálátást igényelt a feladatsorban megjelenő tananyagrészekre. Hogy a tanulók másokkal meg akarnak tanítani valamit, ez a témához kapcsolódó attitűdökre is pozitív hatással van. A feladatlapokat megíró diákok közül többen érdeklődtek utólag a kutatásról, ezzel úgy tűnt, hogy mások attitűdjét is befolyásoltuk.

A kutatás folytatását diákcsoporttal és saját kutatásként is tervezem, ennek egyik célja lesz a kutatócsoportban született fejlesztések további tesztelése, illetve további hasonló segédletek készítése. Tapasztalat: a hibák megfigyelése mellett nagyobb szerepet kell kapnia annak is, hogy milyen feladatokat sikerül hibátlanul megoldani, illetve az X1 hibák okai: ha nem tudnak elindulni a feladaton, vagy ha teljesen hibás gondolatokkal dolgoznak megoldók.

Szombathely, 2020. 07.06.

Zsiros Péter
kutatásvezető

matematika szakos tanár