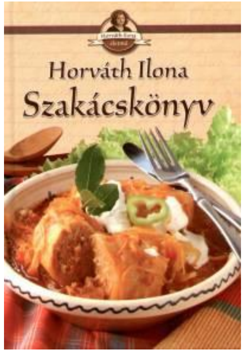
Szöveges feladatok megoldása egyismeretlenes egyenlettel

(Zsiros Péter anyagai)

Ez a recept!



0. lépés: Olvasd el a feladatot, rajzolj hozzá, képzeld el konkrét számokkal, míg már érzed, hogy megértetted a benne levő helyzetet, kapcsolatokat.
1. lépés: Válassz ismeretlent (x), olyat, amivel minél több mennyiség kapcsolatban van. Gyakran azt célszerű választani, amire a feladat rákérdez. Folyóírással, mértékegységgel együtt írd le, mit jelöl az x.
2. lépés: Az x segítségével írd fel a feladatban szereplő mennyiségeket! Kifejezéseket kapsz, amikben x szerepel. Folyóírással, mértékegységgel írd le, melyik kifejezés mit jelent a szöveg szerint.
3. lépés: Lesz a feladatban olyan információ, amit a végén egyenletként tudsz felírni. Írd fel az egyenletet!
4. lépés: Oldd meg az egyenletet!
5. lépés: Értelmezd a megoldást a szöveg szerint (segít az, amit az 1. lépésnél leírtál). Adj szöveges választ!
6. lépés: Ellenőrizd a megoldást a szöveg szerint, lépésről lépésre olvasd a szöveget és számold végig az eredményeddel, kijön-e.

- Ezzel a „recepttel” az ilyen jellegű feladatok nagy részét meg lehet oldani.
- Ha nem boldogulsz, akkor **csak logikával** (gondolatmenetet le kell írni!) is dolgozhatsz.
- Az **arányt tartalmazó** feladatok, a **mozgási**, a **közös munkára vonatkozó** és a **keverési** feladatok megoldási módszerét külön érdemes megjegyezni - de mindegyiknek a fenti „recept” az alapja.

Két mintafeladat – megoldás a fenti lépések alapján

Feladat	Felváltottunk 1000 forintot 10, 20 és 50 forintosokra. Összesen 41 pénzdarabot kaptunk, ezek között ugyanannyi volt a 10 és 20 forintos. Hány 10 és hány 20 forintost kaptunk?	Béla a matematikadolgozat előtti napokban megoldja a témakörhöz tartozó összes példát. Ha minden napon ötöt oldana meg, akkor az utolsó napra csak két feladat maradna, ha minden napon négyet oldana meg, akkor az utolsó hat feladatot már nem tudná megoldani. Hány nap múlva lesz a dolgozat?
0. lépés	Pénzérmék darabszámáról és forintértékéről szól a feladat. Ilyen mennyiségeink vannak.	A példák számáról és a napok számáról szól a feladat. Ilyen mennyiségeink vannak.
1. lépés	$\boldsymbol{x}$: a 10-esek száma (darab)	$\boldsymbol{x}$: a dolgozatig hátralévő napok száma (darab)
2. lépés	A 20-asok száma is $\boldsymbol{x}$ (darab) 10-esek és 20-asok száma együtt: $x+x=$ $\mathbf{2}\boldsymbol{x}$ (darab) Az 50-esek száma: $\mathbf{41–2}\boldsymbol{x}$ (darab) – mivel összesen 41 darab pénzérme van. A 10-esek értéke: $\mathbf{10}\cdot\boldsymbol{x}$ (forint) A 20-asok értéke: $\mathbf{20}\cdot\boldsymbol{x}$ (forint) Az 50-esek értéke: $\mathbf{50\cdot(41–2}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ (ez is forint)	Ha minden napon ötöt oldana meg, akkor $\mathbf{5}\boldsymbol{x}$ (darab) feladatot oldana meg. Ekkor az utolsó napon nem ötöt old meg, hanem ennél hárommal kevesebbet, azaz kettőt. Emiatt a feladatok száma $\mathbf{5}\boldsymbol{x}\mathbf{–3}$. Ha minden napon négyet oldana meg, akkor $\mathbf{4}\boldsymbol{x}$ (db) feladatot oldana meg a hátralévő időben.

		De így hat feladatra nem maradna ideje, emiatt a feladatok száma **$4x+6$**.
3. lépés	Az egyenlet (mivel az összes pénz együtt 1000 Ft): $10x + 20x + 50(41–2x) = 1000$	Kétféleképp is felírtuk a feladatok számát. Ez ugyanannyi kell legyen, azaz: $5x–3 = 4x+6$
4. lépés	Megoldása: $x = 15$	Megoldása: $x = 9$
5. lépés	Tehát 15 db tízforintos, 15 db húszas, és 11 db ötvenes van (mert $41 – 2·15 = 11$)	Tehát 9 nap van hátra a dolgozatig.
6. lépés	Ellenőrzés: 15 tízes értéke 150 Ft 15 húszas értéke: 300 Ft 11 ötvenes értéke: 550 Ft Ez együtt tényleg 1000 Ft.	Ellenőrzés: Az első esetben 8 napon át megold $8·5=40$ feladatot, az utolsó napon 2 feladatot, így 42 feladat van. A második esetben 9 napon át megold $9·4=36$ feladatot, és marad 6 feladat, így is megvan a 42 feladat.

A 2. feladat megoldása **logikával**:
Ha valaki mindennap ötöt old, valaki más meg négyet, akkor az első épp annyival több feladatot old meg, amennyi a napok száma. De itt az egyik 3-mal többet, a másik 6-tal kevesebbet oldana meg, mint a feladatok száma, e két mennyiség eltérése 9, azaz ennyi a napok száma.

Hát kezdjük!

Értsd meg!

A szövegesekben a kezdés a legnehezebb – ez a tapasztalatom. Ezért most elkezdek a feladott egyszerű szöveges feladatok fájljából egy csomó feladatot megoldani. Azaz – csak eljutok az egyenletig, onnantól már a Ti dolgotok (egyenletmegoldás, értelmezés, szöveg szerinti ellenőrzés)! Kezdem is…

1. Felváltottunk 1000 forintot 10 és 20 forintosokra. Összesen 67 pénzdarabot kaptunk érte. Hány 10 és hány 20 forintost kaptunk?

Megoldás kezdete:
x : ennyi 10 forintos van (darab)
$67–x$: ennyi 20 forintos van (darab)
$10x$: ennyi a 10 forintosok **értéke** (forint)
$20(67–x)$: ennyi a 20 forintosok **értéke** (forint)
Ez összesen 1000 forint, tehát ez az egyenlet:
$10x + 20(67–x) = 1000$
stb.

5. Amikor egy vonalas és egy kockás füzetet vettem, összesen 250 forintot fizettem. Béla három vonalas és öt kockás füzetet vett, és 1030 forintot fizetett. Mennyibe kerül egy kockás füzet?

Megoldás kezdete:
x : ennyibe kerül egy kockás füzet (forint)
$250–x$: ennyibe kerül egy vonalas füzet (forint)
$5x$: ennyibe kerül az öt kockás füzet (forint)
$3(250–x)$: ennyibe kerül a három vonalas füzet (forint)

Ez összesen 1030 forint, tehát ez az egyenlet:
$5x + 3(250–x) = 1030$
stb.

11. Két kabát együtt 12 000 forintba kerül. Ha az egyik árát 15%-kal növeljük, a másikét 5%-kal csökkentjük, akkor összesen 12800 forintba kerülnek. Mennyibe került a két kabát eredetileg és az árváltozás után?

Megoldás kezdete:
x : ennyibe kerül az egyik kabát (forint)
$12000–x$: ennyibe kerül a másik kabát (forint)
$1{,}15x$: ennyibe kerül az első kabát, ha árát 15%-kal növeljük (forint)
$0{,}95(12000–x)$: ennyibe kerül második kabát, ha árát 5%-kal csökkentjük (forint)
Ez összesen 12800 forint, tehát ez lesz az egyenlet:
stb.

13. Egy apa tavaly háromszor annyi idős volt, mint a lánya. 10 év múlva az apa kétszer annyi idős lesz, mint akkor a lánya. Mennyi idősek most?

Megoldás kezdete:
x : ennyi idős volt tavaly a lány (év)
$3x$: ennyi idős volt tavaly az apa (év)
$x+10$: ennyi idős lesz 10 év múlva a lány (év)
$3x+10$: ennyi idős lesz 10 év múlva az apa (év)
Az apa 10 év múlva kétszer annyi idős lesz, mint a lánya, tehát ez az egyenlet:
$2\,(x+10) = 3x+10$
stb.

17. Lajos és Miklós között a korkülönbség 14 év. Ezelőtt 5 évvel Miklós másfélszer annyi idős volt, mint Lajos. Hány évesek most?

Megoldás kezdete:
A második mondat szerint Miklós idősebb!
x : ennyi idős most Lajos (év)
$x+14$: ennyi idős most Miklós (év)
$x–5$: ennyi idős volt Lajos öt éve (év)
$x+14–5$: ennyi idős volt Miklós 5 éve (év) (ez felírható így is: $x+9$)
stb. Te írd fel az egyenletet is – de vigyázz, Miklós az idősebb!

Házi feladat:
Ebből a fájlból oldd a hasonlókat – de lehet a többit is…
http://matek.szent-norbert.hu/zsp/ix/dokum/szoveges.doc

Jó munkát!

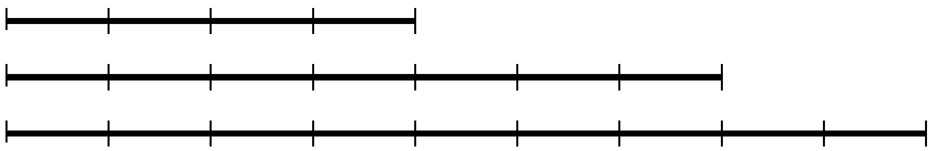
Arányos szövegesek

Ezek aranyos szövegesek!

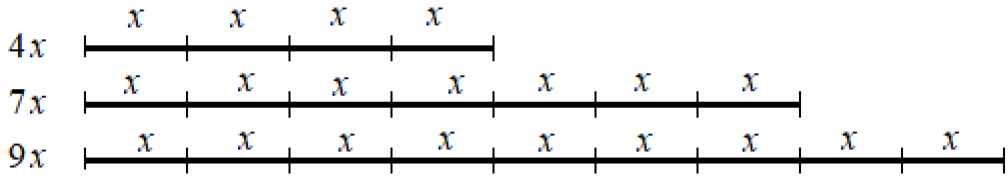
Több olyan szöveges van, mely arányt tartalmaz. Hogyan kezeljük az arányokat a szövegesekben? Erről tanulunk ma, ilyen szöveges feladatokat oldunk.

1. Egy háromszög szögeinek aránya 4 : 7 : 9 . Mekkora a legnagyobb szög?

Előzetes gondolatok:
Mit jelent az „arány”? Két szám esetén a hányadosukat szoktuk úgy nevezni, hogy a számok aránya. Például a 21 és 12 aránya 7:4 , ami helyett mondhatunk $\frac{21}{12}$-et , azaz $\frac{7}{4}$ –et is. Ezek szerint az arányok egyszerűsíthetők. Azonosak az arányok a törtekkel? Nem teljesen. Három szám esetén már nem törtekről van szó. Vizsgáljuk meg a feladatban szereplő 4 : 7 : 9 arányt! Szakaszokkal szemléltethetem a legjobban:



Ha az első szakaszt négy, a másodikat hét, a harmadikat kilenc egyenlő részre osztom, akkor mindhárom szakaszon ugyanakkorák a kis részek.
Ezeket a kis egyenlő részeket jelölöm *x*-szel az ilyen feladatokban!



Ha kiszámolom az *x*-et egyenlettel, akkor a feladat végén megszorzom ezt a közös részt a megfelelő számokkal (itt most 4—gyel, 7-tel és 9-cel), így kapom a keresett mennyiségeket.

Megoldás kezdete:
$4x$: A legkisebb szög (°-ban)
$7x$: A középső szög (°-ban)
$9x$: A legnagyobb szög (°-ban)
A háromszög szögeinek összege 180° (tanultuk!), tehát ez lesz az egyenlet:
$4x + 7x + 9x = 180$
Egyenlet megoldása:
$20x = 180$
$x=9$
Megoldás értelmezése: Ennek a közös résznek a 4-szerese, 7-szerese és 9-szerese a három szög: 36°, 63°és 81°. A legnagyobb szög 81°-os.
Ellenőrzés: A szögek aránya helyes, és összegük: 36°+63°+81°=180° .

2. Béla és Pista testvérek, Béla 12 éves, Pista 15 éves. Életkoruk arányában kaptak pénzt a nagymamájuktól egy kis édességre. Béla a boltban elköltötte zsebpénzének felét, Pista pedig 1800 forintot, így ugyanannyi pénzük maradt. Mennyi pénzt kaptak a nagymamától?

<u>Megoldás kezdete</u>:
Béla és Pista életkorának aránya 12:15. Egyszerűsítve ez 4:5 arányt jelent, a szöveg szerint ez a kapott zsebpénzek aránya is. Az előbbi jelöléssel kezdhetjük tehát a megoldást:
$4x$: Béla zsebpénze (forint)
$5x$: Pista zsebpénze (forint)
Béla elköltötte pénze felét, tehát csak $4x$ forint fele maradt neki: $2x$ forint.
Pista megmaradt pénze: $5x - 1800$ (forint)
A két maradék pénzösszeg egyenlő, tehát ez az egyenlet:
$2x = 5x - 1800$
<u>Megoldás, értelmezés, ellenőrzés</u>:

(a füzetben folytatni kell önállóan!)

3. Ferkó és Laci együtt járnak röplabdaedzésre. Két éve, amikor elkezdtek edzésre járni, életkoruk aránya 3:5 volt, ez az arány mostanra már 5:8 -ra változott. Hány évesek most?

<u>Megoldás kezdete</u>:
Két arány van. **Csak az egyiket jelölhetjük** az x segítségével, mert a közös rész a két aránypárban nem ugyanaz! Jelöljük tehát a jelenlegi életkorokat x segítségével és a szokásos módon írjuk fel vele a feladatban szereplő mennyiségeket.
$5x$: ennyi éves most Ferkó
$8x$: ennyi éves most Laci
$5x-2$: ennyi éves volt Ferkó két éve
$8x-2$: ennyi éves volt Laci két éve
Egyenlettel kellene kifejezni, hogy ennek a legutóbbi két mennyiségnek az aránya 3:5. Most jól jön az a gondolat, hogy **két szám aránya a hányadosukat** jelenti!
Ez lesz tehát az egyenlet:

$$\frac{5x-2}{8x-2} = \frac{3}{5}$$

Közös nevezőre hozás, beszorzás a nevezővel:

$$\frac{5(5x-2)}{5(8x-2)} = \frac{3(8x-2)}{5(8x-2)}$$

$$5(5x-2) = 3(8x-2)$$

$$25x - 10 = 24x - 6$$

$$x=4$$

<u>Megoldás értelmezése</u>:
Ferkó most . . . éves, Laci pedig . . .
<u>Ellenőrzés</u>:
. . . .

. . . .

Pótold a pontok helyén a hiányzó részeket!

<u>Házi feladat</u>:
1. Egy személygépkocsi és egy teherautó átlagsebességének aránya 7:5. Egy napon a 42-es kilométertáblánál levő benzinkútnál tankolnak mindketten. A teherautó korábban továbbindul, már a 90-es kilométertáblánál van, amikor a személyautó utánaindul ugyanazon az útvonalon. Hányas kilométertáblánál éri utol a személyautó a teherautót?

2. Edit, Kata és Nóra mobiltelefonozik a nagyszünetben. Ránéznek egymás telefonjára, kinek hány százalék van még az akkumulátor energiájából. E három szám aránya 4 : 5 : 7 . Edit telefonján a szünet végére 16%-kal, Katáén 20%-kal, Nóráén 18%-kal csökken az akkumulátor töltöttsége. A szünet végén hármuk töltöttségének összege 170%. Hány%-ot jelez Nóra telefonja a szünet elején és végén?

3. Egy magyar mondatban a magánhangzók és mássalhangzók aránya 2:3. Ha a mondat végére hozzátesszük a „nem biztos” szavakat, akkor ez az arány 3:5 lesz. Hány mássalhangzó volt az eredeti mondatban? Írj egy ilyen mondatot!

Ebből a fájlból oldd a hasonlókat – de lehet a többit is…
http://matek.szent-norbert.hu/zsp/ix/dokum/szoveges.doc

Jó munkát!

Százalékos feladatok

A százalékokkal való számolás igen fontos része mindennapi életünknek és sok más tudománynak is. Gondoljunk csak arra, hogy a diákok búsulnak, ha dolgozatuk nem éri el a 30%-ot (ami a kettes határa), vagy hogy háziasszonynak mennyire kell figyelni az eceten a százalék jelzésére, és milyen sokszor halljuk azt: „70% , hogy holnap esni fog az eső”.
A **százalék** más szóval: **századrész.**
Egy X mennyiségnek a 37 százaléka, más szóval a 37 századrésze így számolható ki:

$$X \cdot \frac{37}{100}$$

Ezt tizedestörttel is ki lehet fejezni: X·0,37 – tehát **minden százalék** kiszámítása **egy szorzás**.

Gyakran van szó arról, hogy egy mennyiséget valahány százalékkal növelünk. Ilyenkor az eredeti mennyiséghez hozzáadjuk „saját magának” valahány századnyi részét. Ha egy X mennyiséget 37%-kal növelünk, akkor *X-hez, ami 100 századrésze önmagának, hozzáadjuk még a 37 század részét, így az X mennyiségnek összesen 100+37=137 századrészét kell venni.*
Ez így számolható ki:

$$X \cdot \frac{137}{100} = X \cdot 1{,}37$$

Tehát a **százalékos növelés** kiszámítása is egy **szorzás**.

Más esetekben arról van szó, hogy egy mennyiséget valahány százalékkal csökkentünk. Ilyenkor az eredeti mennyiségből elvesszük „saját magának” valahány századnyi részét. Ha egy

X mennyiséget 37%-kal csökkentünk, akkor *X-ből, ami 100 századrésze önmagának, elvesszük a 37 század részét, így az X mennyiségnek összesen 100–37=63 századrészét kell csak venni.* Ez így számolható ki:

$$\mathrm{X} \cdot \frac{63}{100} = \mathrm{X} \cdot 0{,}63$$

Tehát a **százalékos csökkentés** kiszámítása is egy **szorzás**.

A fenti példákban szereplő szorzószámokat (a 0,37-et, az 1,37-et és a 0,63-at is) **százalékrátának** szokták nevezni.

A százalék kiszámítását, a százalékos növelést és csökkentést szokták **képlettel** is felírni, de ez csúnyán elbonyolíthat egy feladatot. Bemutatom a három képletet és azt, hogy én hogyan számolnék a képlet helyett.

A három képlet:

X mennyiség *p* %-a: $\mathrm{X} \cdot \frac{p}{100}$

X mennyiség *p* %-kal növelve: $\mathrm{X} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

X mennyiség *p* %-kal csökkentve: $\mathrm{X} \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Egy-egy példán mutatom be, hogy a képletek jók, de sokkal egyszerűbben lehet számolni a fent leírt logikával:

1. *Számítsuk ki 15000 forint 28%-át!*
   - Logikával: 28% az a századrészével, azaz 0,28-cal szorzok: 15000·0,28=4200
   - Az első képlettel: *p*=28, emiatt: $15000 \cdot \frac{28}{100} = \frac{420000}{100} = 4200$

2. *Növeljünk 15000 forintot 28%-kal!*
   - Logikával: 100%-ot 28%-kal növelek, az 128% lesz, ennek a századrészével, azaz 1,28-cal szorzok: 15000·1,28= 19200
   - A második képlettel: *p*=28, emiatt: $15000 \cdot \left(1 + \frac{28}{100}\right) = 15000 \cdot \left(\frac{100}{100} + \frac{28}{100}\right) = 15000 \cdot \frac{128}{100} = \frac{1920000}{100} = 19200$

3. *Csökkentsünk 15000 forintot 28%-kal!*
   - Logikával: 100%-ot 28%-kal csökkentek, az 72% lesz, ennek a századrészével, azaz 0,72-vel szorzok: 15000·0,72= 10800
   - Az utolsó képlettel: *p*=28, emiatt: $15000 \cdot \left(1 - \frac{28}{100}\right) = 15000 \cdot \left(\frac{100}{100} - \frac{28}{100}\right) = 15000 \cdot \frac{72}{100} = \frac{1080000}{100} = 10800$

Figyeld meg, hogy mindig **azt szorozzuk** a százalékrátával, **amihez viszonyítunk**. Ezt a magyar nyelv gyakran a . . . **-nak,** . . . **-nek** raggal fejezi ki, például: „a pénzem**nek** a 71%-a”.
A második feladattípusnál többféle nyelvi megfogalmazás lehet: . . . **-t növelik**, . . . **-t emelik** vagy . . . **nő** valahány százalékkal, stb. még sokféle nyelvi kifejezés lehet.
A harmadik feladattípusnál is többféle nyelvi megfogalmazás lehet: . . . **-t csökkentik,** . . . **-t leárazzák,** vagy . . . **csökken** valahány százalékkal, stb. még sokféle nyelvi kifejezés lehet.

Ha épp azt kell kiszámolni, amihez viszonyítunk, (vagyis az **alapot**), akkor **osztani** kell a százalékrátával!

Például:

Mi**nek** a 65%-a 780 forint? Válasz: 780 : 0,65 = 1200 (Ft)

Milyen tömege**t növeltünk** 28%-kal, ha 5760 kg lett belőle? Válasz: 5760 : 1,28 =4500 (kg)

Hány liter víz volt az edényben, ha 4 %-a elpárolgott belőle, és most már csak 48 liter van benne? Válasz: 48 : 0,96 = 50 (liter)

Ha a százalék a kérdés a feladatban, akkor **amihez viszonyítok, azzal osztok**, a hányadost pedig **százalékrátaként** értelmezem.

Például:

Hány %-a 600 forint**nak** a 420 forint? Válasz: 420 : 600 = **0,7** – ez a százalékráta, emiatt a 600 ft-nak ez a **70%-a**.

Hány %-**kal növeltem** a tömeget, ha 850 dkg-ból 1071 dkg lett? Válasz: 1071 : 850 = **1,26** – ez a százalékráta, emiatt **26% -kal lett növelve** a 850 dkg.

Hány % párolgott el 750 ml vízből, ha most már csak 705 ml van az edényben?

Válasz: 705 : 750 = 0,94 ez a százalékráta, emiatt **6% párolgott el**.

Feladatok

1. A bútoráruházban egy kör alakú asztal 4000 forinttal drágább, mint az ugyanolyan stílusú négyszögletű asztal. Az áruház akciója keretében a körasztal árából 30% engedményt adnak, a szögleteset meg csak 16%-kal árazzák le, az asztalok így ugyanannyiba kerülnek. Mennyi volt az áruk eredetileg?

Megoldás kezdete:

x : A szögletes asztal eredeti ára (Ft)

x+4000 : A kör alakú asztal eredeti ára (Ft)

Mindkét százalékos számítás csökkentés. 100%-ból kell levonni a megadott %-okat, úgy kapjuk a megfelelő szorzószámokat (százalékrátákat). Emiatt így folytatható:

$x\cdot 0,84$: A szögletes asztal akciós ára (Ft)

$(x+4000)\cdot 0,7$ A kör alakú asztal akciós ára (Ft)

Az egyenlet már felírható:

$x\cdot 0,84=(x+4000)\cdot 0,7$

Egyenlet megoldása:

$0,84x = 0,7x+2800$

$0,14x=2800$

$x=20000$

Megoldás értelmezése:

A szögletes asztal eredeti ára 20 000 forint volt, a körasztalé pedig 24 000 forint.

Ellenőrzés: Akciós ár: 20000·0,84=16800 a szögletesé és 24000·0,7=16800 a körasztalé. Ezek egyenlők.

2. Béla és Pista testvérek, nagymamájuktól zsebpénzt kapnak egy kis édességre – ketten összesen 3600 forintot kapnak. Béla a boltban elkölti kapott zsebpénzének 20%-át, Pista pedig 36%-át, így összesen 2640 forintjuk marad. Mennyi pénzt kapott Béla a nagymamától?

Megoldás kezdete:
Ismét százalékos csökkenésről szól a feladat! A két százalékráta 0,8 és 0,64.
x : Béla zsebpénze (forint)
$3600–x$: Pista zsebpénze (forint)
Béla magmaradt pénze: $x·0,8$ forint.
Pista megmaradt pénze: $(3600–x) ·0,64$ (forint)
A két maradék pénzösszeg összege adott, tehát ez az egyenlet:
$x·0,8 + (3600–x) ·0,64=2640$
Megoldás, értelmezés, ellenőrzés:

(a füzetben folytatni kell önállóan!)

Házi feladatok:

1. Géza meglátogatta falun élő nagynénjét. Az út 64%-át autópályán tette meg, az út többi részén kisebb utakon ment a kocsijával. Kiszámolta, hogy az autóúton 35 kilométerrel többet ment, mint a mellékutakon. Milyen távol lakik Gézától a nagynénje?

2. Egy azonos márkájú szabadidő-felsőt és egy nadrágot külön árultak a boltban. Együttes áruk 22 000 forint volt. Egy akció során a felsőt 20%-kal, a nadrágot 12%-kal árazták le, így most 18 280 forintért lehet megvenni a kettőt együtt. Mennyit fizetnénk, ha most csak a leárazott nadrágot vennénk meg?

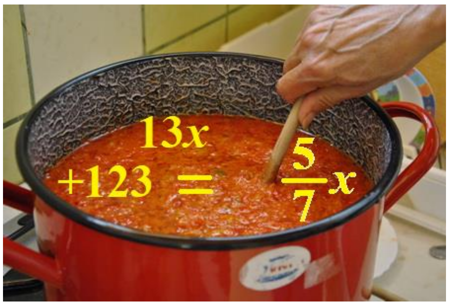
3. Egy magyar mondatban a betűk 37,5 %-a magánhangzó. Ha a mondathoz hozzáírjuk ezt a két szót: „*ez igaz.*” , akkor már a betűk 40 %-a lesz magánhangzó. Hány mássalhangzó volt az eredeti mondatban? Írj egy ilyen mondatot!

Ebből a fájlból oldd a hasonlókat – de lehet a többit is…
http://matek.szent-norbert.hu/zsp/ix/dokum/szoveges.doc

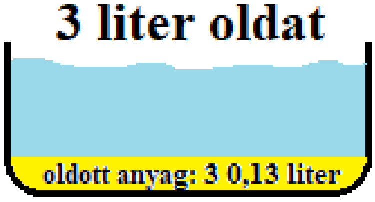
Jó munkát!

Keverési feladatok

A minap a százalékszámítással kötöttünk barátságot. Most is százalékos feladatokkal foglalkozunk, de feladataink a kémia területéről valók.



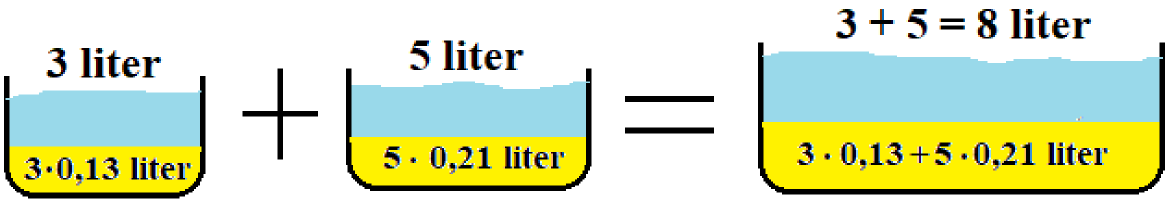
Oldatokat, elegyeket fogunk összekeverni – de ugyanígy kell majd megoldani például azokat a feladatokat is, melyekben meg van adva, hogy az osztályok hány százaléka lány külön-külön és együtt.



Mit jelent az, hogy 3 liternyi oldat 13%-os? Azt, hogy a teljes oldatmennyiség 13%-a az oldott anyag. Ha gondolatban leülepítenénk az aljára az oldott anyagot, akkor az a teljes mennyiség 0,13-szorosa lenne, azaz $3 · 0,13$.

Ha két ilyen oldatot összeöntünk, akkor az oldatok mennyisége és az oldott anyagok mennyisége is összeadódik.

<u>Egy példán keresztül</u>: Ha összeöntök 3 liter 13%-os ecetet és 5 liter 21%-os ecetet, akkor hány%-os lesz a keverék?



Tehát összesen 3+5=8 liter lesz a keverék, és benne 3·0,13+5·0,21=1,44 liter ecet lesz. (Az ábrán kék a víz és sárga a benne levő oldott ecet.)
Múlt órán tanultuk, hogy kell folytatni. Azt kell megmondani, hogy 8 liter**nek** hány %-a 1,44 liter. Amihez viszonyítok, azzal osztok: 1,44 : 8 = 0,18. Tehát az oldat 18%-os lesz.
Mindezeket egy keverési táblázattal is leírhatom, a bonyolultabb keverési feladatokat ennek segítségével fogjuk megoldani:

	Oldat mennyisége	**%**	**Oldott anyag mennyisége**	összefüggés
I. anyag	**3**	**13**	**3·0,13**	← %-os
II. anyag	**5**	**21**	**5·0,21**	← %-os
Keverék	**3+5**	**?**	**3·0,13+5·0,21**	← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

A táblázat minden sora egy-egy oldatot jelent. A táblázat egyes soraiban és oszlopaiban összefüggések vannak a cellákba írt adatok közt. Az első oszlopban a felső adatok összege az alsó (oldatok mennyisége), és a harmadik oszlopban is összeadódnak a felső adatok (oldott anyagok mennyisége). A középső oszlopban nincs összefüggés, csak annyi igaz, hogy bármennyi oldatot keverünk össze, a keverék „töménysége”, azaz százalékértéke a legkisebb és a legnagyobb százalékérték közé esik.
Minden sorban százalékos összefüggés van, azaz az első oszlopbeli adatot meg kell szorozni a második oszlopbeli adat századrészével, és ez kerül a harmadik oszlopba.

Oldjunk meg a táblázattal egy összetettebb feladatot! Ha jól töltjük ki a táblázatot, akkor az „magától oldja” a feladatot!

1. Hány gramm 7%-os sóoldatot kell hozzáadni 12 gramm 22%-os sóoldathoz, hogy végül 16%-os oldatot kapjunk?

<u>Megoldás</u>:
Írjuk be a táblázatba, amit tudunk!

	Oldat mennyisége (g)	**%**	**Oldott anyag (azaz: só) mennyisége (g)**	összefüggés
I. anyag		**7**		← %-os
II. anyag	**12**	**22**		← %-os
Keverék		**16**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Jelöljük x-szel, amit keresünk, az első oldat mennyiségét. (Írtam a mértékegységet is a táblázatba, mert betartom a szövegesek megoldási lépéseit ☺)

Egyúttal a második oldat sótartalmát is be tudom már írni.

	Oldat mennyisége (g)	**%**	**Oldott anyag (azaz: só) mennyisége (g)**	összefüggés
I. anyag	***x***	**7**		← %-os
II. anyag	**12**	**22**	**12·0,22**	← %-os
Keverék		**16**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Most felhasználom, hogy az első oszlopban összegződnek a mennyiségek, majd felhasználom, hogy az első sorban százalékos összefüggés van:

	Oldat mennyisége (g)	**%**	**Oldott anyag (azaz: só) mennyisége (g)**	összefüggés
I. anyag	***x***	**7**	***x*·0,07**	← %-os
II. anyag	**12**	**22**	**12·0,22**	← %-os
Keverék	***x*+12**	**16**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Az utolsó sor utolsó oszlopában összegződnek a mennyiségek, mert a sómennyiségek összeadódnak az összeöntéskor: ***x*·0,07 + 12·0,22** ez kerülne az utolsó rubrikába.
Az utolsó sorban százalékos összefüggés van, tehát a keverék sótartalma: **(*x*+12) ·0,16** ez kerülne az utolsó rubrikába.
A két mennyiség ugyanaz! Emiatt ez a két kifejezés egyenlő értéket kell adjon. Megvan az egyenlet!

$$x \cdot 0{,}07 + 12 \cdot 0{,}22 = (x+12) \cdot 0{,}16$$

Megoldása már nem nehéz.

$$0{,}07x + 2{,}64 = 0{,}16x + 1{,}92$$
$$0{,}72 = 0{,}09x$$
$$8 = x$$

Tehát 8 gramm 7%-os oldat kell.
Az ellenőrzés is a táblázat alapján mehet:

	Oldat mennyisége (g)	**%**	**Oldott anyag (azaz: só) mennyisége (g)**	összefüggés
I. anyag	***8***	**7**	***0,56***	← %-os
II. anyag	**12**	**22**	**2,64**	← %-os
Keverék	***20***	**16**	***3,2***	← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

A piros ***3,2*** adat kétféleképpen is kijön, 0,56+2,64=***3,2*** és 20·0,16=***3,2***.
Ezzel ellenőriztük a feladatot.

2. Mennyi 12%-os és mennyi 20%-os ecetet kell összeönteni, hogy 6 dl 15%-os ecetet kapjunk?

Megoldás:
Írjuk be a táblázatba, amit tudunk!

	Oldat mennyisége (dl)	%	Oldott anyag (azaz:ecet) mennyisége (dl)	összefüggés
I. anyag		**12**		← %-os
II. anyag		**20**		← %-os
Keverék	**6**	**15**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Jelöljük x-szel, amit keresünk, például az első oldat mennyiségét. (Írtam ide is mértékegységet!)
Egyúttal a második oldat ecettartalmát is be tudom már írni, mert az első oszlopban összegződnek a mennyiségek.

	Oldat mennyisége (dl)	%	Oldott anyag (azaz:ecet) mennyisége (dl)	összefüggés
I. anyag	x	**12**		← %-os
II. anyag	$6-x$	**20**		← %-os
Keverék	**6**	**15**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Most felhasználom, hogy a felső két sorban százalékos összefüggés van:

	Oldat mennyisége (dl)	%	Oldott anyag (azaz:ecet) mennyisége (dl)	összefüggés
I. anyag	x	**12**	$x \cdot 0{,}12$	← %-os
II. anyag	$6-x$	**20**	$(6-x) \cdot 0{,}2$	← %-os
Keverék	**6**	**15**		← %-os
összefüggés	+	nincs	+	

Az utolsó sor utolsó oszlopában összegződnek a mennyiségek, mert a sómennyiségek összeadódnak az összeöntéskor: $x \cdot 0{,}12 + (6-x) \cdot 0{,}2$ ez kerülne az utolsó rubrikába.
Az utolsó sorban százalékos összefüggés van, tehát a keverék sótartalma: $6 \cdot 0{,}15$ ez kerülne az utolsó rubrikába.
A két mennyiség ugyanaz! Emiatt ez a két kifejezés egyenlő értéket kell adjon. Megvan az egyenlet!

$$x \cdot 0{,}12 + (6-x) \cdot 0{,}2 = 6 \cdot 0{,}15$$

Megoldása már nem nehéz.

$$0{,}12x + 1{,}2 - 0{,}2x = 0{,}9$$
$$-0{,}08x = -0{,}3$$
$$x = 3{,}75$$

Tehát 3,75 dl 12%-os ecet és 2,25 dl 20%-os ecet kell.

Az ellenőrzés is a táblázat alapján mehet. **Házi feladat!**

<u>További házi feladatok:</u>
Sárga 133- 140. feladatok.

Segítség a feladatokhoz:
- Az oldószert tisztán 0%-os oldatnak tekintjük.
- Az oldott anyagot oldószer nélkül 100%-os oldatnak tekintjük.

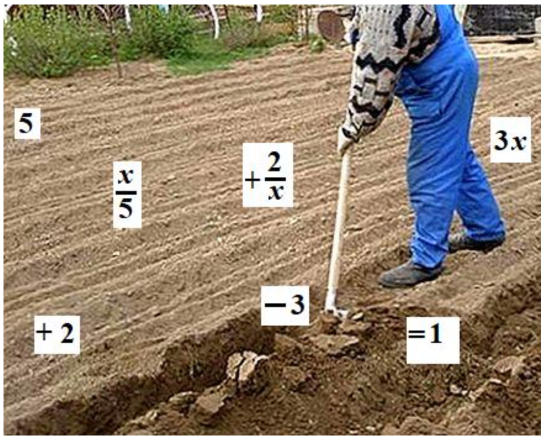
- Ha fémeket ötvözünk, akkor az egyik (általában az értéktelenebb) fém az oldószer szerepét, a másik fém az oldott anyag szerepét tölti be, és oldatként lehet kezelni őket.
- A keverési feladatokat csak logikával, egyenlet nélkül is meg lehetne oldani.

Példa nem keverési feladatra, ami keverési feladatként oldható meg:

Egy ünnepélyen a lelátó két részén ülő gyerekek színes lapok feltartásával mutatnak be élőképeket. A bal oldali lelátón ülő gyerekeknek 54%-a lány, a jobb oldali lelátón ülőknek pedig 42%-a lány. A két lelátón összesen 600 gyerek ül, akiknek 47%-a lány. Hányan ülnek a bal és hányan a jobb oldali lelátón? Hány lány és hány fiú ül a bal és a jobb oldalon?

Közös munkára vonatkozó feladatok

Ha végigdolgoztátok az előző két tananyagot, akkor jóban lettetek a százalékokkal, ők most már előre köszönnek Nektek az utcán ☺



Most közösen végzett munkára vonatkozó feladatokat fogunk megoldani.

<u>Mintafeladat</u>
Ősszel minden évben gond a kiskert felásása! Tavalyelőtt az apa egyedül ásta fel, akkor 6 óra alatt végzett, tavaly, amikor a fia ásta fel egyedül, 12 óra alatt lett készen. Az idei évben ketten együtt dolgoznak Mennyi idő alatt ássák fel?

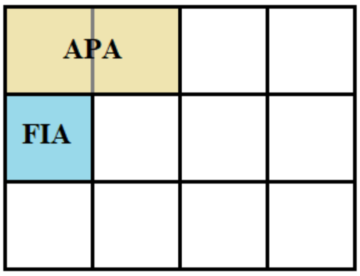
<u>Hibás, átgondolatlan válaszok jegyzéke:</u>

$6 \cdot 12 = 72$ óra alatt.
$6+12 = 18$ óra alatt.
$\frac{6+12}{2} = 9$ óra alatt.
$12 - 6 = 6$ óra alatt.

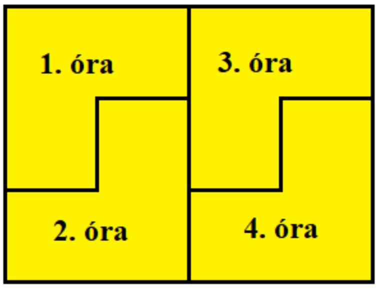
Ezek a válaszok mind hibásak, a konkrét feladattal kapcsolatosan semmilyen gondolat nincs mögöttük. Kérem, hogy senki **ne próbálja így** „megoldani” ezeket a feladatokat!

Háromféleképpen oldom meg itt ezt a feladatot:

<u>1. Ábrával</u>
Osszuk fel a kertet 12 egyenlő területű parcellára!
Bejelöltem, mekkora részt ás fel egy óra alatt az apa (2 parcellát), és a fia (1 parcellát).



Összesen tehát 3 parcellát ásnak fel egy óra alatt. Ekkora rész négyszer van meg a kertben, tehát együtt dolgozva **4 óra alatt** lesznek készen.



2. Okoskodással:

Az apa 1 órai munkával a kertnek 1/6 részét ássa fel.
A fia 1 óra alatt 1/12 részét ássa fel.
Akkor 1 óra alatt együtt $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ részt ásnak fel.
De ha minden órában a kert negyedét ássák fel, akkor 4 óra alatt lesznek készen.

3. Egyenlettel:

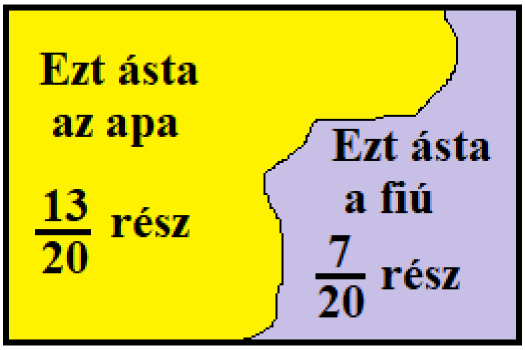
Előzetes megfigyelések

A kert részei összeadhatók, mert **ugyannak a mennyiségnek** a részei.

Például **ennek a kertnek** a fele meg **ennek a kertnek** a negyede az együtt **ennek a kertnek** a háromnegyede, de **ennek a kertnek** a felét **nem adhatjuk hozzá** hasonlóképpen **egy másik kert** háromnegyedéhez.

Ha az ásás után megfigyeljük, a kertnek hánydrészét ásta az apa, és hányadrészét ásta a fiú, akkor **a két rész összege 1** lesz.

Itt egy példa erre:



És itt tényleg látszik, hogy $\frac{13}{20}+\frac{7}{20}=1$

A feladatra vonatkoztatva mindezt:

Az apa a kertnek $\frac{1}{6}$ részét ássa fel 1 óra alatt. (ez a kertnek egy részét jelző szám, nincs mértékegysége!)

A fiú a kertnek $\frac{1}{12}$ részét ássa fel 1 óra alatt. (ez a kertnek egy részét jelző szám, nincs mértékegysége!)

A szokásos kezdeti lépések:

x: ennyi idő alatt végeznek együtt a munkával (óra)

$x \cdot \frac{1}{6}$ az apa a kertnek ekkora részét ássa fel *x* óra alatt. (ez a kertnek egy részét jelző szám, nincs mértékegysége!)
$x \cdot \frac{1}{12}$ a fiú a kertnek ekkora részét ássa fel *x* óra alatt. (ez a kertnek egy részét jelző szám, nincs mértékegysége!)
Akkor ennek a két résznek az összege az előzetes megfigyelés szerint 1. Megvan az egyenlet:

$$x \cdot \frac{1}{6} + x \cdot \frac{1}{12} = 1$$

Az egyenlet mértékegysége **nem** óra, **nem** m^2 vagy valami más, hanem a kert részeivel van az egyenlőség felírva, ez mértékegység nélküli mennyiség, úgynevezett viszonyszám.

Megoldás:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} = 1$$
$$\frac{2x}{12} + \frac{x}{12} = \frac{12}{12}$$
$$x + 2x = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

Kijött így is a 4 óra, de bonyolultabbnak tűnik.
Csakhogy az ennél összetettebb feladatokat már csak így lehet megoldani.

Példa: Az útépítésnél egy homokkupacot kell ellapátolni. A fiatalabb dolgozó egyedül 25 perc alatt, az idősebb 40 perc alatt tudná ellapátolni. Az idősebb egyedül kezdett neki a munkának, egyedül dolgozott 6 percig, akkor beállt a fiatalabb is segíteni. Amikor a kupac 80%-át ellapátolták, a munkavezető megállította őket, mert a maradék homokra később lesz csak szükség. Mennyi ideig lapátoltak kettesben?

A fiatal a homoknak $\frac{1}{25}$ részét lapátolja el 1 perc alatt. (ez a homokkupac részét jelző szám, nincs mértékegysége!)
Az idősebb a homok $\frac{1}{40}$ részét lapátolja el 1 óra alatt. (nincs mértékegysége)
A szokásos kezdeti lépések:
x: ennyi perc volt a közös munkájuk – ennyi ideig dolgozott a fiatal munkás.
x+6 ennyi ideig dolgozott az idősebb munkás.
$x \cdot \frac{1}{25}$ a fiatal ekkora részét lapátolta el a homoknak *x* óra alatt, amíg dolgozott.
$(x+6) \cdot \frac{1}{40}$ az idősebb ekkora részét lapátolta el a homoknak *x*+6 óra alatt, amíg dolgozott.
Akkor ennek a két résznek az összege most **nem 1** ! Az ellapátolt részek összege csak a homok 80%-a, azaz 0,8 része.
Megvan tehát az egyenlet:

$$x \cdot \frac{1}{25} + (x+6) \cdot \frac{1}{40} = 0{,}8$$

Megoldás:

$$\frac{x}{25} + \frac{x+6}{40} = 0{,}8$$
$$\frac{8x}{200} + \frac{5(x+6)}{200} = \frac{160}{200}$$

$$8x + 5x + 30 = 160$$
$$13x = 130$$
$$x = 10$$

Értelmezés:
Tehát 10 percig dolgoztak együtt.
Ellenőrzés:
Az idős 16 perc alatt ellapátolta a homok 16/40 részét (ez egyszerűsítve 2/5 rész)
A fiatal 10 perc alatt ellapátolta a homok 10/25 részét (ez egyszerűsítve 2/5 rész)
Együtt tehát 2/5 + 2/5= 4/5 részt lapátoltak el.
4/5=80/100 , vagyis ez tényleg a homok 80%-a.

Házi feladatok

1. Két kőműves dolgozik egy építkezésen. A falakat az idősebb kőműves 20, a fiatalabb 28 óra alatt vakolná be egyedül. A fiatalabb kőműves egyedül lát munkához, az idősebb egy órával később kezdi a munkát, s innentől együtt dolgoznak, amíg a falakat mind be nem vakolták. Mennyi idő alatt lett így kész a munka?

2. Három betonkeverő gép dolgozik egy építkezésen. A szükséges betont az egyik gép 10, a másik 15, a harmadik 18 óra alatt keverné ki egyedül. Először a harmadik gép lát munkához, majd két óra múlva a másik két gép is munkába áll, és hárman folytatják a keverést. Összesen mennyi idő alatt lesznek kész a munkával?

3. Három testvér közül Jánosnak 10, Mihálynak 15, Boldizsárnak 12 órába telik, míg a közös szőlőt egyedül megkapálja. Egyik napon Boldizsár már 4,5 órát dolgozott, amikor megérkeztek testvérei, s hárman kapáltak tovább. Mennyi idő alatt fejezték be együtt a munkát?

4. Három betonkeverő gép dolgozik egy építkezésen. A szükséges betont az egyik gép 10, a másik 5, a harmadik 8 óra alatt keverné ki egyedül. A három gép egyszerre lát munkához, ám a harmadik gép egy óra múlva meghibásodik és leáll, így csak a másik két gép folytatja a keverést. Összesen mennyi idő alatt lesznek kész a munkával?

5. Három titkárnő közül Blankának 24, Máriának 18, Jolánnak 12 órába telne, míg legépelné egy épülő kultúrközpont összes hivatalos dokumentumát. Mária öt órán át dolgozott, mikor megérkezett két társa, ettől kezdve hárman együtt gépelték az anyagot. Mennyi idő alatt fejezték be együtt a munkát?

További házi feladatok:
Sárga 170. oldal 143-152 . feladatok (kivéve a 149.).

Jó munkát!

Mozgási feladatok

A keverési feladatok a kémia tudományához kapcsolódtak, most egy fizika köréből vett feladattípust tanulunk meg ügyesen megoldani. A közös a két típusban az, hogy táblázattal lehet mindkettőt könnyen megoldani.

Ezekben a feladatokban három mennyiség kapcsolata jelenik meg. Fizikában használt jelölésekkel:

***v* = sebesség** **_s_ = út** **_t_ = idő.**

Ezek következő kapcsolatban állnak egyenletes mozgás esetén, illetve akkor, ha átlagsebességgel dolgozunk:

$$\boldsymbol{v = \frac{s}{t} \qquad t = \frac{s}{v} \qquad s = v \cdot t}$$

A feladatokban „**stimmelni**” **kell a mértékegységeknek**! Azaz ha a sebességet km/órában mérem, akkor az utat kilométerben és az időt órában **kell** mérnem, különben **nem lesznek igazak a fizikai képletek**!
Ehhez persze tudni kell a mértékváltásokat (általános iskola 5. osztálytól sokat szerepeltek ezek).

_x_ kilométer = 1000·_x_ méter **_y_ méter = 0,001·_y_ kilométer**

$$\boldsymbol{x \text{ óra } (h) = 60 \cdot x \text{ perc } (min) = 3600 \cdot x \text{ másodperc } (sec)}$$

$$\boldsymbol{x \text{ másodperc } (sec) = \frac{x}{60} \text{ perc } (min) = \frac{x}{3600} \text{ óra } (h)}$$

$$\boldsymbol{x \ \text{km/h} = \frac{x}{3,6} \ \text{m/s} = \frac{5x}{18} \text{m/s}}$$

$$\boldsymbol{x \ \text{m/s} = 3,6 \cdot x \ \text{km/h} = \frac{18x}{5} \text{km/h}}$$

A megoldáshoz használt táblázat három oszlopa a ***v*, *s*, *t* mennyiségeket** tartalmazza, egymással **összhangban levő mértékegységekben** mérve.
A táblázat annyi sort tartalmaz, ahány egyenletes mozgásról szó van a feladatban.
A kitöltés rendje:

0. Mértékegységek eldöntése, szükség esetén mértékváltás
1. Ismert adatok beírása a táblázatba
2. Ismeretlen választása (célszerű a hiányzó sebességet, ha az ismert, akkot az időt *x*-nek választani. Csak ritka esetekben célszerű az utat *x*-nek venni).
3. Rubrikák kitöltése a szöveg szerint, **de csak addig**, míg minden sorban **két kitöltött és egy üres** rubrika van!
4. A sorokban levő egyetlen üres rubrikát a ***v* , *s* , *t* közti megfelelő összefüggéssel** kell kitölteni.
5. Egyenletet lehet felírni a szöveg alapján (általában az utoljára beírt képletekkel)
6. stb. innen már ugyanaz, mint a többi szövegesnél.

Példa 1.

Kirabolnak egy bankot, a tettesek autóval menekülnek az autópályán 150 km/h sebességgel. A rendőrök 20 perc késéssel indulnak az üldözésükre 175 km/h sebességgel. Hány óra múlva érik utol a rendőrök a tetteseket?

Megoldás:

0. Ha km/h a sebesség, akkor az időnek h (óra) mértékegységben kell lennie!
   20 perc az $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ óra.
1. Ismert adatok:

	v (km/h)	*s* (km)	*t* (h - *azaz óra*)
bankrablók	150		
rendőrök	175		

2. *x* jelölése (sebesség megvan, emiatt az egyik idő az *x*):

	v (km/h)	*s* (km)	*t* (h - *azaz óra*)
bankrablók	150		x
rendőrök	175		

3. Kitöltés az *x*-et használva, amíg minden sorban csak egy rovat hiányzik (felhasználva, hogy a rendőrök $\frac{1}{3}$ órával kevesebb ideig mentek):

	v (km/h)	*s* (km)	*t* (h - *azaz óra*)
bankrablók	150		x
rendőrök	175		$x - \frac{1}{3}$

4. A sorokban levő egyetlen üres rubrikát a ***v* , *s* , *t*** közti megfelelő összefüggéssel töltjük ki. Itt most az **s = v·t** összefüggést használhatjuk:

	v (km/h)	*s* (km)	*t* (h - *azaz óra*)
bankrablók	150	150*x*	x
rendőrök	175	$175\left(x - \frac{1}{3}\right)$	$x - \frac{1}{3}$

5. Egyenlet (amikor a rendőrök utolérik a rablókat, akkor **ugyanannyi utat tettek meg** a banktól, mint azok – emiatt a két út egyenlő):

$$150x = 175\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

6. Megoldjuk:

$$150x = 175x - \frac{175}{3}$$
$$\frac{175}{3} = 25x$$
$$\frac{7}{3} = x$$

Tehát $\frac{7}{3}$ órát, azaz 2 óra és 20 percet robogtak a bankrablók. De a rendőrök 20 perccel utánuk indultak csak, tehát 2 óra múlva érik utol a rablókat.

Ellenőrzés a táblázat segítségével:

	v (km/h)	s (km)	t (h - *azaz óra*)
bankrablók	150	$150 \cdot \frac{7}{3} = 350$	$\frac{7}{3}$
rendőrök	175	$175 \cdot 2 = 350$	2

<u>Példa 2</u>.

Huba kerékpáron indul a nagymamájához a 16,5 km-re levő szomszédos faluba. Az út odafelé emelkedik, ezért visszafelé másfélszer akkora a sebessége, mint odafelé. Az oda-vissza úton összesen 1 óra 15 percig biciklizett. Mennyi idő alatt ért oda a nagymamához?

<u>Megoldás</u>:

0. Ha km/h a sebesség, akkor az időnek h (óra) mértékegységben kell lennie!
   1 óra 15 perc az $\frac{75}{60} = 1{,}25$ óra.
1. Ismert adatok:

	v (km/h)	s (km)	t (h - *azaz óra*)
odafelé		16,5	
visszafelé		16,5	

2. x jelölése (sebesség nincs meg ez legyen az x):

	v (km/h)	s (km)	t (h - *azaz óra*)
odafelé	x	16,5	
visszafelé		16,5	

3. Kitöltés az x-et használva, amíg minden sorban csak egy rovat hiányzik (felhasználva, hogy a visszafelé másfélszeres sebességgel ment) :

	v (km/h)	s (km)	t (h - *azaz óra*)
odafelé	x	16,5	
visszafelé	$1{,}5x$	16,5	

4. A sorokban levő egyetlen üres rubrikát a $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$ közti megfelelő összefüggéssel töltjük ki. Itt most a $\boldsymbol{t = \frac{s}{v}}$ összefüggést használhatjuk:

	v (km/h)	s (km)	t (h - *azaz óra*)
odafelé	x	16,5	$\frac{16{,}5}{x}$
visszafelé	$1{,}5x$	16,5	$\frac{16{,}5}{1{,}5x}$

5. Egyenlet (a két idő összesen 1,25 óra):

$$\frac{16{,}5}{x} + \frac{16{,}5}{1{,}5x} = 1{,}25$$

6. Megoldjuk:

$$\frac{16{,}5 \cdot 1{,}5}{1{,}5x} + \frac{16{,}5}{1{,}5x} = \frac{1{,}25 \cdot 1{,}5x}{1{,}5x}$$

$$16{,}5 \cdot 1{,}5 + 16{,}5 = 1{,}25 \cdot 1{,}5x$$
$$41{,}25 = 1{,}875x$$
$$22 = x$$

Tehát 22 km/h sebességgel ment odafelé Huba. De a feladat nem ezt kérdezte! A táblázatot kitöltjük ebből kiindulva, ez egyben az ellenőrzés kezdete is:

	v (km/h)	*s* (km)	*t* (h - *azaz óra*)
odafelé	22	16,5	$\frac{16{,}5}{22} = 0{,}75$
visszafelé	1,5·22=33	16,5	$\frac{16{,}5}{33} = 0{,}5$

Tehát a nagymamához 0,75 óra, azaz ¾ óra alatt ért oda. (Ez 45 perc.)
Az ellenőrzés már majdnem kész is, csak azt kell ellenőrizni, hogy mennyi volt az összes ideje: 0,75+0,5=1,25 óra valóban!

Házi feladatok:

1. Egy Trabant meghibásodott, tulajdonosa szervizbe viszi. A szerelőhöz a hiba miatt csak 40 km/h sebességgel tud vele menni. Miután megszerelték, 70 km/h sebességgel megy haza, de kerülővel egy 4 km-rel hosszabb úton. Oda- és visszaútjának ideje összesen 51 perc volt. Milyen messze esik a szerelő a rövidebb úton?

2. Egy afrikai férfi terepjáró autóján hajt az egyik oázistól a másikig. Az út kétharmadát 60 km/h sebességgel teszi meg. Az út hátralevő harmadán a sebessége egy kisebb homokvihar miatt csak 50 km/h. A teljes menetidejét a férfi 192 percnek méri. Milyen messze van egymástól a két oázis?

3. Egy afrikai férfi terepjáró autóján hajt az egyik oázistól a másikig. Az utat odafelé 60 km/h sebességgel teszi meg. A visszaúton a sebessége egy kisebb homokvihar miatt csak 50 km/h. A teljes menetidejét a férfi 198 percnek méri. Milyen messze van egymástól a két oázis?

4. Egy autós A-ból indul B városba. Az út negyedéig falvak közt haladt, így 80 km/h volt az átlagsebessége, ezután az út háromnegyedéig autópályán haladt, itt 120 km/h volt az átlagsebessége, innentől egészen B-ig 90 km/h volt az átlagsebessége. Mennyi a városok távolsága, ha a teljes út 145 percig tartott?

5. Egy alaszkai nő lánctalpas járművön hajt az egyik telepről a másikra. Az út harmadát 40 km/h sebességgel teszi meg. Az út hátralevő kétharmadán a sebessége egy kisebb hóvihar miatt csak 30 km/h. A teljes menetidőt a hölgy 55 percnek méri. Milyen messze van egymástól a két telep?

6. Egy régi Wartburggal indul kirándulásra egy házaspár. Az út első részén 80 km/h átlagsebességgel robognak, ám a kocsi meghibásodik és csak 45 km/h sebességgel tudnak továbbhaladni. A szálláshelyet elérve kiszámítják, hogy a műszaki hiba előtt 6 km-rel hosszabb utat tettek meg, mint utána. A teljes menetidejük összesen 117 perc volt. Milyen messze van a szálláshely a lakhelyüktől? Mekkora volt az egész útra vonatkozó átlagsebességük?

7. Egy kormányozható léghajó egy reptérről kelet felé indul útnak, állandó, 25 km/h nagyságú sebességgel. 40 perccel később egy személyszállító repülőgép indul utána keleti irányba 225 km/h sebességgel. Mennyi idő múlva és hol éri utol a léghajót?

Jó munkát!

Kérdésekre felelek

1. Béla és Pista között 5 év a korkülönbség. Most Pista három évvel idősebb, mint amennyi Béla volt akkor, amikor Pista feleannyi idös volt, mint Béla most. Hány évesek a fiúk?

Megoldás:
A feladat kétféle lehet attól függően, ki az idősebb!
Két időpont jelenik meg „most” és „akkor” – ebben a két időpontban kell figyelni az életkorokat.

A) lehetőség: Béla idősebb
x: Ennyi idős Pista most (év)
x+5 Ennyi idős Béla most (év)
Akkor, amikor Pista feleannyi idös volt, mint Béla most, akkor…
Pista $\frac{x+5}{2}$ éves volt
Béla $\frac{x+5}{2}$ +5 éves volt

A szöveg szerint amennyi Béla volt **akkor**, annál 3 évvel idősebb Pista **most**. Egyenlettel le tudom írni ezt, mert mindkét mennyiség fel van már írva!

$$\left(\frac{x+5}{2}+5\right)+3=x$$

Ezt kell megoldani!
A megoldás: x=21. Pista most 21 éves, Béla most 26, Pista **akkor** volt 13, Béla akkor volt 18.

B) lehetőség: Pista idősebb
x: Ennyi idős Pista most (év)
x–5 Ennyi idős Béla most (év)
Akkor, amikor Pista feleannyi idös volt, mint Béla most, akkor…
Pista $\frac{x-5}{2}$ éves volt
Béla $\frac{x-5}{2}$ –5 éves volt

A szöveg szerint amennyi Béla volt **akkor**, annál 3 évvel idősebb Pista **most**. Egyenlettel le tudom írni ezt, mert mindkét mennyiség fel van már írva!

$$\left(\frac{x-5}{2}-5\right)+3=x$$

Ezt kell megoldani!
A megoldás: x= –9. Ebben az esetben nincs megoldás!

2. Az aszalt szilva 55%-a, a banánnak pedig 20%-a szénhidrát. Reggelire aszalt szilvát és banánt ettem, összesen 47 dkg-ot. Reggeli után kiszámoltam, hogy összesen 136 g szénhidrát volt benne. Hány dkg aszalt szilvát ettem?

Eltérőek a mértékegységek, számoljunk grammban! 47 dkg=407 g.

Megoldás:
x: ennyi g banánt ettem
470 – x: ennyi aszalt szilvát ettem.
x·0,2 : ennyi g szénhidrát volt abban a banánban
(470 – x)·0,55 : az aszalt szilvában meg ennyi g szénhidrát volt

Egyenlet:

x·0,2 + (470 – x)·0,55 =136

Innen már megy, ugye? (Vigyázz, mert ebből gramm eredményt kapsz, és a feladat dkg-ot kérdez!) -> Házi feladat!

3. Ha háromszor annyi pénz lenne a zsebemben, mint amennyi most van, akkor feleannyi pénz hiányozna a 10000 forinthoz, mint most. Hány forint van most a zsebemben?

Két eset van, ami most **van** és amikor több **lenne**. Mindkettő esetben felírom a szereplő mennyiségeket.

Megoldás:
x: ennyi pénz van a zsebemben **most (Ft)**
3x :ennyi pénzem **lenne (Ft)**
10000–x : ennyi pénz hiányzik a 10000-hez **most (Ft)**
10000–3x :ennyi pénz hiányozna a 10000-hez, ha több **lenne (Ft)**
Az utolsóként felírt hiányzó pénz feleannyi, mint a fölötte levő, akkor lesznek tehát egyenlők, ha az utolsót kétszer veszem.

$2(10000–3x) = 10000–x$

Innen már megy, ugye? -> házi feladat!

<u>További házik:</u>

A múlt órai házikból lehet még bőven oldani, PLUSZ ezek:

1. Béla üdítős flakonok kupakjait gyűjti. Kupakjainak harmadrésze kék, hatodrésze piros, negyedrésze sárga, 15%-a pedig fekete színű. A fennmaradó 18 kupak mind fehér színű. Hány kupakja van Bélának?

2. Egy diák edzésbe kezd, fekvőtámaszokat csinál. Hétfőn, kedden és szerdán ugyanannyi darabot csinál, csütörtökön ezt 10%-kal növeli, pénteken pedig még a csütörtöki mennyiségnél is 5 darabbal többet „nyom le”. A diák kiszámolta, hogy az öt nap alatt összesen 161 fekvőtámaszt csinált. Mennyit csinált az egyes napokon?

3. Két munkagép dolgozik egy kavicsbányában. A nagyobb teljesítményű gép naponta 24%-kal több kavicsot termel ki, mint a másik. Egyik héten a kisebbik gép öt napig, a nagyobbik hat napig dolgozott, így együtt 31,1 tonna kavicsot termeltek. Mennyi kavicsot termel ki a két gép egy nap alatt?

Számjegyes szövegesek

Ezek a feladatok nem a mindennapi életből vett feladatok, hanem magához a matematikához kötődnek, a számok tulajdonságaihoz.

Mondhatni, hogy ezek matematikáról szóló szövegesek ☺

Ezekhez a feladatokhoz egy új jelölést mutatok:

- Ha egy kétjegyű szám jegyei: a és b, akkor a számot jelölhetjük így: $\overline{ab}$
- Ha egy háromjegyű szám jegyei: a, b, és c , akkor a számot jelölhetjük így: $\overline{abc}$
- Ha egy négyjegyű szám jegyei: a , b , c és d , akkor a számot jelölhetjük így: $\overline{abcd}$
- stb. ezt akárhány jegyű szám esetén alkalmazhatjuk.

Például ha $x=7$ és $y=8$, akkor $\overline{xyx}$ jelöli a 787-et (azaz hétszáznyolcvanhetet).

A számjegyes feladatoknál a helyiértékekkel kell tisztában lenni.
Itt van például a 4317, ez egy négyjegyű szám. A jegyei: 4;3;1 és 7. Hogyan lehet a szám **értékét** felírni 4;3;1 és 7 segítségével?
Átfogalmazva: Ha egy szám jegyei: a,b,c és d, akkor ezzel a négy betűvel milyen műveleteket végezzünk, hogy az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot kapjuk?
Ha csak ezt írjuk, hogy $abcd$, az azért nem jó, mert a betűk egymás mellé írása szorzást jelent, itt a példában $4·3·1·7=84$ és nem 4317.
Ha ezt írjuk: hogy $a+b+c+d$, az a fenti példánál nem jó, mert a betűk összeadásával az eredmény $4+3+1+7·=15$ és nem 4317.

A helyes válasz ebből az összeadásból látszik:

$$\begin{array}{r} 4000 \\ 300 \\ 10 \\ +\quad 7 \\ \hline 4317 \end{array}$$

Tehát a válasz $\overline{abcd}$=1000a+100b+10c+d.
Hasonlóképp más számjegyes feladatoknál is így fejezhetünk ki többjegyű számokat számjegyeikkel.

Példák: $\overline{abc}$=100a+10b+c. $\overline{xyx}$=100x+10y+x. $\overline{p8q0}$=1000p+800+10q

Oldjunk meg feladatokat ezzel a tudásukkal!

1. Egy háromjegyű szám első számjegye 1-gyel nagyobb a második számjegynél és 1-gyel kisebb, mint az utolsó számjegy. A számot az utolsó jegyével elosztva 96-ot kapok. Melyik ez a szám?

Megoldás:
Az első számjegy: x *(nincs mértékegysége)*

A második számjegy: x–1 (mert az első számjegy **nagyobb** a másodiknál)

A harmadik számjegy: x+1 (mert az első számjegy **kisebb** a harmadiknál)

A szám értéke: $\overline{x(x-1)(x+1)}$, műveletekkel kifejezve: 100x + 10(x–1) + (x+1) ez tovább alakítható zárójelbontással és összevonásokkal: $= 100x + 10x - 10 + x + 1 = 111x - 9$

A számot elosztom az utolsó jegyével: $\frac{\overline{x(x-1)(x+1)}}{x+1}$, ennek értéke: $\frac{100x+10(x-1)+(x+1)}{x+1}$

Ez egyenlő 96-tal.

Az egyenlet:

$$\frac{100x + 10(x-1) + (x+1)}{x+1} = 96$$

Egyenlet megoldása (szorzok a nevezővel, összevonok, majd mérlegelv jön):

$$100x + 10(x-1) + x + 1 = 96(x+1)$$
$$100x + 10x - 10 + x + 1 = 96x + 96$$
$$111x - 9 = 96x + 96$$
$$15x = 105$$
$$x = 7$$

Válasz: A szám a 768.
Ellenőrzés:
768 : 8 = 96 – valóban annyi!

2. Egy négyjegyű szám utolsó jegye egy 8-as. Ha ezt a végéről levágjuk, és előre írjuk, újra egy négyjegyű számot kapunk, amely 3249-cel nagyobb az eredeti számnál. Mi volt az eredeti négyjegyű szám?

Itt az okoz nehézséget, hogy a számban négy ismeretlen számjegy van, ha így írjuk fel: $\overline{abc8}$
A 8-ast előre írva csak egyetlen egyenlőséget kapunk $\overline{abc8} + 3249 = \overline{8abc}$ amiben három ismeretlen is van.

Megnézem ezt a fura átalakítást egy konkrét példán. Választok találomra egy 8-ra végződő négyjegyű számot és elvégzem el rajta a feladatban szereplő átalakítást, hogy jobban lássam, mi is történik itt:
A választott számom 2468. Ekkor a 8-ast levágva 246 marad, és eléírva 8-ast 8246 lesz. A 246 „egyben maradt”!
Felírom most az eredeti és az átalakított számot is ennek figyelembevételével:
2468 = 2460 +8 = 10·246 + 8 és 8246 = 8000 + 246 Ezek különbsége persze nem 3249 lett, de a példán keresztül rájöttem, hogy a 246 helyére kell x-et írni, akkor csak ez az egyetlen ismeretlen lesz a feladatban!

<u>Megoldás</u>:
x *(nincs mértékegysége)* : az első három számjegyből álló háromjegyű szám

$10x+8$: az eredeti szám

$8000+x$: az átalakított szám.

<u>Az egyenlet</u>:

$$(10x+8)+3249=8000+x$$

<u>Egyenlet megoldása</u>:

$$10x+3257=8000+x$$
$$9x=4743$$
$$x=527$$

<u>Válasz</u>: A szám az 5278.
<u>Ellenőrzés</u>:
8527 az 5278 -nál valóban 3249-cel nagyobb.

<u>Házi feladatok</u>:

1. Egy háromjegyű szám 3-ra végződik, számjegyeinek összege pedig 15. Ha a számjegyeket fordított sorrendben írjuk le, 396-tal kisebb számot kapunk. Mi az eredeti háromjegyű szám:

2. Gondoltam egy négyjegyű számra, első és második számjegye azonos. A harmadik számjegy 2-vel nagyobb, az utolsó pedig 1-gyel kisebb, mint az első számjegy. Ha elhagyom az utolsó számjegyet, a kapott háromjegyű szám hétszerese 1004-gyel kisebb az eredeti gondolt számnál. Melyik számra gondoltam?

Jó munkát!

Törtes, számolásos szövegesek

Ezek a feladatok sem a mindennapi életből vett feladatok, hanem magához a matematikához kötődnek, a számokhoz, a számoláshoz.

Mondhatni, hogy ezek is matematikáról szóló szövegesek ☺

1. Két szám összege 77. Ha a nagyobbat maradékosan elosztjuk a kisebbel, akkor a hányados 7, a maradék pedig 5 lesz. Melyik ez a két szám?

Idézzük fel: mit is jelent a maradékos osztás? Egy példát nézzünk rá:

43:8=5 (48-ban a 8 megvan 5-ször, maradt a 3.)
3

Ugye, emlékeztek rá? Ebben az az érdekesség, hogy olyan egyenlőségjelet írunk le a felső sorban, ami nem igaz! A fenti piros egyenlőségjel helyesen így mutatná az igazat: **43:8=5,375** Hogyan lehet akkor a fenti piros egyenlőséget igaz egyenlőségként felírni? Úgy, hogy az ellenőrzését írjuk fel. A visszaszorzással kapott eredményhez a maradékot hozzáadva éppen megkapjuk az első számot (az osztandót).
Íme: **8 · 5 + 3 = 43** ez az egyenlőség már igaz! Tehát ha *a*-t *b*-vel osztva *c* a hányados és *d* a maradék, akkor az a szám éppen d-vel nagyobb a b és c szorzatánál.
Jelölésekkel felírva:

Ezt a maradékos osztást: $a : b = c$
d

Egyenlőséggel így írjuk: $bc+d=a$.

Megoldás:
Az egyik szám: x *(nincs mértékegysége)*
A másik szám: $77–x$
Az osztás felírása „kisiskolás” jelöléssel:

$x : (77-x) = 7$
5

Felírás egyenlettel:

$$7 \cdot (77 - x) + 5 = x$$

Egyenlet megoldása:

$$539 - 7x + 5 = x$$
$$544 = 8x$$

A megoldás $x = 68$
Válasz: Az első szám a 68, a második a 9.
Ellenőrzés:
$68 : 9 = 7$
5

2. Egy tört értéke $\frac{2}{3}$. Ha a számlálójából elveszek 11-et , a nevezőjéhez meg hozzáadok 30-at, akkor a tört értéke a felére csökken. Mi az eredeti tört?

Itt az okoz nehézséget, hogy hogyan írjam fel egy ismeretlennel a törtet. Ha az értéke $\frac{2}{3}$, akkor valamilyen számmal bővítve kaphatom a keresett törtet, és ezt a számot jelölhetem *x*-szel, így a törtem ez lesz: $\frac{2x}{3x}$.

Megoldás:

$\frac{2x}{3x}$: az eredeti tört *(nincs mértékegysége)*

$2x-11$: a megváltoztatott számláló

$3x+30$: a megváltoztatott nevező

$\frac{2x-11}{3x+30}$: az átalakított tört.

Az egyenlet:

$$\frac{2x-11}{3x+30}=\frac{1}{3}$$

Egyenlet megoldása
beszorzok a nevezőkkel – „keresztbeszorzás”:

$$3(2x-11)=3x+30$$
$$6x-33=3x+30$$
$$3x=63$$
$$x=21$$

Válasz: Az eredeti tört $\frac{2\cdot21}{3\cdot21}=\frac{42}{63}$
Ellenőrzés házi feladat!

Házi feladatok:

1. Gondoltam két számra, különbségük 163. Ha maradékosan elosztom a nagyobbat a kisebbel a hányados 5, a maradék pedig 15. Milyen számokra gondoltam?

2. Egy tört számlálójának és nevezőjének összege 65. Ha a számlálót 4-gyel, a nevezőt pedig 5-tel csökkentem, akkor a tört értéke $\frac{2}{5}$ lesz. Mi az eredeti tört?

Jó munkát!

„Egyenletlenségek”

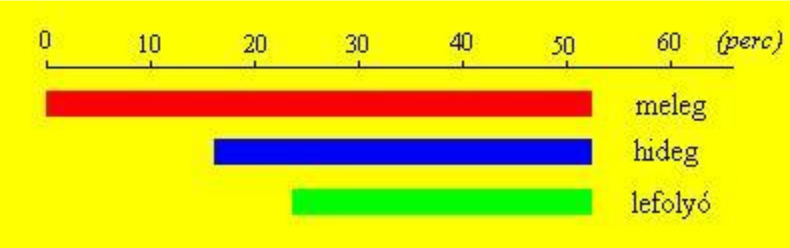
Sokszor kapunk olyan szöveges feladatot, amelynek megoldásánál nyilvánvalóan látszik, hogy hozzá algebrai modellt alkotva, azaz egyenletet vagy egyenletrendszert készítve megoldható a feladat. (Persze **nem minden** szöveges feladat ilyen!)
Most ízelítőt adnék **nem algebrai jellegű** feladatmegoldásokból. Ezek megfelelően leírva **teljes értékű megoldásai** egy-egy feladatnak, akár egy dolgozatban, akár az érettségin vagy egy matematikaversenyen adhattok ilyen fajta megoldást.
Ha „rábukkanunk” egy helyes megoldásra, az még kevés, de úgy már teljes a megoldás, ha megmondjuk, hogy az alaphalmaz mely elemei megoldások és megmondjuk, hogy **más számok miért nem lehetnek** megoldások. Természetesen ha egy feladatot okoskodással oldunk meg, akkor világos fogalmazású mondatokban, pontosan és logikusan kell elmagyaráznunk megoldásunk gondolatmenetét. Akkor kaptok rá maximális pontszámot bármilyen tudáspróbán, ha a megoldáshoz vivő gondolatmenetet aprólékosan leírjátok.

1. feladat: Egy medencét a hideg víz csapja 1 óra alatt, a meleg víz csapja 80 perc alatt tölti meg. A teli medencét egy lefolyó-szivattyúval 2 óra alatt lehet üríteni. Egy alkalommal az üres medence megtöltéséhez kinyitották a melegvizes csapot. 17 perc múlva megnyitották a

hidegvizes csapot is, majd újabb 7 perc múlva valaki véletlenül elindította a lefolyót is. Összesen mennyi idő alatt telt meg így a medence?

<u>Megoldás okoskodással:</u> Számoljunk percekben! A hidegvizes csap 1/60, (azaz 4/240) a melegvizes pedig 1/80 (azaz 3/240) részét tölti meg a medencének egy perc alatt. A lefolyó megnyitásáig így a melegvizes csap 24 perc alatt 24·3/240, a hidegvizes pedig 7·4/240 részt , azaz együtt összesen 100/240 részét töltötték meg a medencének. Tehát amikor a lefolyót megnyitják, akkor a medence 140/240 részét kell még megtölteni. Ha egyszerre van nyitva a két csap és a lefolyó, akkor minden percben 1/60+1/80-1/120=5/240 része telik meg a medencének. Ha a hátralévő 140/240 medencerészt elosztjuk ezzel, akkor megkapjuk, hány perc alatt töltik meg az utolsó szakaszban: 28. Így a medence megtöltésének teljes ideje: 17+7+28=52 perc.

E feladatot (és az összes ilyen jellegű feladatot!) szemléletesebbé tehetjük, ha "időszalagot"



készítünk hozzá.

Ezen jól megfigyelhető, hogy melyik pillanatban melyik csap vagy lefolyó volt nyitva.
Az időszalag az algebrai megoldásnál is segít, vele könnyebb a megfelelő egyenlet felírása.

<u>2. feladat:</u> Béla feltörte malacperselyét, melyben csak 5, 10 és 20 forintosokat talált. 65 pénzdarab volt benne, összesen 740 forint értékben. Béla megfigyelte, hogy ugyanannyi ötforintos van, mint ahány húszas. Mennyi öt- tíz- és húszforintos volt a perselyben?

<u>Megoldás okoskodással:</u> Ha mind a 65 pénzdarab 10 forintos lenne, akkor 650 forint lenne a perselyben. Ha két tízforintost kicserélünk egy öt- és egy húszforintosra, akkor öt forinttal növeljük a pénz mennyiségét, ráadásul így teljesül, hogy azonos darabszámú ötös és húszas lesz. Ismételjük újra meg újra ezt a "cserét", amíg a pénzösszeg 740 forint nem lesz! A 650 forinthoz 90 forint hiányzik, hogy 740 legyen. Ha minden "csere" 5 forinttal növel, akkor tehát 18 cserére van szükség. Azaz 18 darab ötös és 18 húszas lesz, míg a tízesek száma 2·18=36-tal csökkent. Így 65-36=29 darab 10 forintos van**.**

<u>3. feladat:</u> Egy előadóteremben egy csoport tanuló szeretne helyet foglalni. Ha minden asztalhoz csak 8 tanuló ülhetne, akkor kilencüknek nem jutna hely. Ha minden asztalnál 10 ülőhely volna, akkor pedig 15 hely üresen maradna. Hány asztal van a teremben és hány személyből áll a csoport? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 920. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből)

<u>Megoldás okoskodással:</u> Mi lenne, ha 15-tel több tanuló lenne? Akkor a létszám épp az asztalok számának 10-szerese lenne. Ha most csökkentenénk minden asztalnál a helyek számát, akkor asztalonként két tanuló állna fel, s akkor épp a feladat első felében leírt eset állna elő. Az eltérés

az első és második esetben leült diákok közt 9+15=24 fő, s ez az asztalok számának kétszerese. Tehát 12 asztal van, s 8·12+9=105 személy.

<u>4. feladat:</u> Egy folyami hajó állóvízi sebessége 22 km/h. Elindul a folyón lefelé A városból B városba, ott pontosan fél órát áll, majd a folyón felfelé visszaindul B-ből A-ba. Az egész utat 4 óra 54 perc alatt tette meg. Milyen távolságra van egymástól az A és a B kikötő, ha a folyó folyási sebessége 2 km/h?

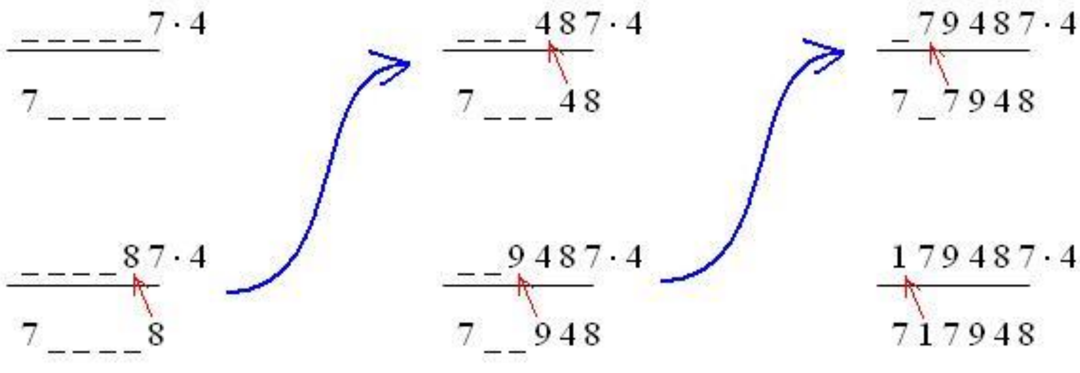
<u>Megoldás okoskodással:</u> Számoljunk órákkal, kilométerekkel és km/h-ban mért sebességekkel! Tudjuk, hogy a hajó valódi (azaz a parthoz viszonyított) sebességét megkapjuk, ha a folyón felfelé haladva az állóvízi sebességéből levonjuk, a folyón lefelé haladva pedig az állóvízi sebességéhez hozzáadjuk a folyó sebességét. Így 20 km/h és 24 km/h sebességeket kapunk. Ugyanazt az utat kell megtennie felfelé és lefelé, az azonos utakon a sebesség és az idő fordítottan arányos egymással, mert szorzatuk állandó. A sebességek aránya 20:24 (azaz 5:6) tehát ennek reciproka a két mozgás időinek aránya, azaz 6:5. Az összes idő átváltva 4,9 óra, vagyis 4,4 óra az oda és visszaút időinek összege. Ezt fel kell osztani 6:5 arányban, vagyis az ezt 11-gyel osztva kapott 0,4 órát be kell szorozzuk 6-tal és 5-tel. A felfelé-út ideje tehát 2,4 óra, a lefelé-út ideje pedig 2 óra. Ha felfelé 2,4 órán át megy a hajó 20 km/h sebességgel, akkor az út 20·2,4=48 km. (Ugyanez jön ki, ha a lefelé-út idejéből és sebességéből számolunk.)

<u>5. feladat:</u> Egy háromjegyű számban a számjegyek összege 17. Az első jegy duplája a másodiknak. A szám öttel több, mint jegyei négyzetösszegének nyolcszorosa. Melyik ez a szám?

<u>Megoldás okoskodással:</u> Az első két számjegy **összege** háromszorosa a második jegynek, ezért osztható hárommal. Viszont a három számjegy összege 17, ezért az első két jegy összege nem lehet 8-nál kisebb. Tehát az első két jegy összege csak 9, 12, vagy 15 lehetne, de a 15 már nem lehet az összeg, mert az első jegy alkkor 10 lenne. Tehát az első jegy csak 6 vagy 8 lehet, így a szám a 845 vagy a 639. Ellenőrizve, a kettő közül csak a 845-re teljesül, hogy $845=(8^2+4^2+5^2)\cdot 8+5$.

<u>6. feladat:</u> Egy hatjegyű szám utolsó jegye 7. Ezt a 7-est a végéről az elejére írva a szám 4-szeresét kapjuk. Melyik ez a hatjegyű szám?

A szorzást felírhatjuk úgy, ahogy a kézi szorzást végezni kell. A megoldást az ábra mutatja.



Minden lépésben elvégezzük a következő jeggyel való szorzást, de mivel a szorzandó és a szorzat számjegyei azonosak, csak eggyel el vannak tolva, rögtön be lehet írni a szorzandó előző helyiértékére (ezt a piros nyilak jelzik). A kapott szám az 179487, ez az egyetlen lehetséges megoldás.

7. feladat: Két egész szám összege 120, szorzata 3456. Határozza meg a számokat!(Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 935. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből)

Megoldás okoskodással: Határozzuk meg a 3456 prímtényezős felbontását! $3456 = 2^7 \cdot 3^3$. Két olyan szorzótényezőre kell bontani, melyek összege 120. Ha egyik tényezőben nincs 3-as prímtényező, akkor a két tényező összege nem lenne 3-mal osztható. Így egyikben kettő, másikban egy darab 3-as prímtényező lehet. Mivel mindkét tényező kisebb kell legyen120-nál, ezért a 3^2 mellé legfeljebb három 2-es prímtényezőt lehet választani. A lehetséges osztópárok tehát: $(3^2 \cdot 2^3) \cdot (3 \cdot 2^4) = 72 \cdot 48$, $(3^2 \cdot 2^2) \cdot (3 \cdot 2^5) = 36 \cdot 96$, $(3^2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2^6) = 18 \cdot 192$ vagy $(3^2) \cdot (3 \cdot 2^7) = 9 \cdot 384$. Ezek közül csak a 72 és a 48 összege 120, ez a két keresett szám.

8. feladat: Azt mondja egy apa a fiának: Három évvel ezelőtt én 9-szer olyan idős voltam, mint te, viszont 6 év múlva 12-szer annyi éves leszek, mint te voltál 3 évvel ezelőtt. Hány éves most az apa és a fia? (Az *Egységes érettségi feladatgyűjtemény* 921. feladata az *Egyenletrendszerek* témakörből)

Megoldás okoskodással: Figyeljük meg, hogy az apa mindkétszer ahhoz az életkorhoz viszonyít, ahány éves volt a fia 3 éve. Ennek a 9-szereséről és 12-szereséről van szó, e két mennyiség különbsége tehát a megfigyelt életkor háromszorosa. Egyik 3 éve volt, a másik 6 év múlva lesz, tehát ezek különbsége 9, így a fiú 3 évvel ezelőtt ennek harmada, azaz 3 éves volt. Az apa 27 volt akkor, tehát most a fiú 6 éves, az apa 30.

SZÖVEGES FELADATOK

Mintafeladatok a dolgozathoz

1) Az asztalos raktárában két léc hosszának aránya 5:7. A hosszabbikból az asztalos levágja a harmadát, a rövidebbikből pedig 10 cm-t, így a két léc egyforma hosszú lesz. Mekkora volt a hosszabbik léc eredetileg?

2) A hozzánk közeli boltban egy kiló banán 70 forinttal olcsóbb, mint a tőlünk távolabbiban. A minap mindkét boltban akciós termék lett a banán, a közeli boltban 16%-kal, a távolabbiban 35%-kal olcsóbban lehet kapni. Így most a távolabbi boltban lett olcsóbb a banán kilója, mégpedig 40 forinttal. Mennyibe kerül most egy kiló banán a közelebbi boltban?

3) Béla édesapja kétszer annyi idős, mint amennyi Béla. Harminchat év múlva az apa életkora már csak 20% -kal lesz több, mint Béláé. Hány éves most Béla?

4) Mennyi 13%-os és 38%-os sóoldatot kell összeönteni, hogy 15 kg 28 %-os töménységű keverékünk legyen?

5) Három szobafestőnek kell kitapétázni egy lakást. Az egyik munkás, ha egyedül dolgozna, 36, a másik 30, a harmadik 20 óra alatt lenne készen. Először az első festő lát munkához, majd két óra múlva a másik két festő is munkába áll, és hárman folytatják a tapétázást. Így mennyi idő alatt lesznek kész a munkával?

6) Egy papírboltban kétféle radírt lehet kapni, az egyik fajtából egy darab 14 forinttal többe kerül, mint a másikból. Az olcsóbb radírból összesen 24 darabot, a drágábból 32 darabot adtak el egy napon. Az eladott radírok áru összértéke 4648 forint volt.
Hány forintba kerül az olcsó és a drága radír darabja? Hány százaléka az olcsó radír ára a drágáénak?

7) Egy pékségben minden hétköznapon összesen 1400 darab alapvető péksüteményt, azaz zsemlét és kiflit készítenek. A pünkösd előtti pénteken nagyobb rendelésre számítanak, ezért 15%-kal növelik a kiflik és 25%-kal növelik a zsemlék számát. Így aznap összesen 1686 darab péksütemény készül. Mennyi zsemlét és kiflit szoktak készíteni hétköznapokon?

8) Egy kormányozható léghajó egy reptérről kelet felé indul útnak, állandó, 25 km/h nagyságú sebességgel. 40 perccel később egy személyszállító repülőgép indul utána keleti irányba 225 km/h sebességgel. Mennyi idő múlva és hol éri utol a léghajót?

9) Egy kamion 70 km/h átlagsebességgel haladva 36 percnyi késéssel érkezne céljához. Ha 90 km/h sebességgel haladna, akkor 1 óra 24 perccel előbb ér be. Számítsd ki az út hosszát és azt a sebességet, mellyel pontosan érkezne céljához!

10) Ha egy háromszög legkisebb szögéhez 3°-ot hozzáadunk, vagy a középső szögből 3°-ot elveszünk, vagy a legnagyobb szöget 3-mal elosztjuk, mindháromszor ugyanakkora szöget kapunk eredményül. Mekkora a legnagyobb szög?

Ilyenek várhatók a dolgozatban!