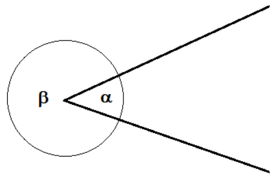
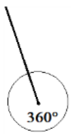
# Ezt kell tudni geometriából a 9. osztály végéig

***Térelemek:*** Pont, egyenes és sík. Alapfogalmak, nincs definíciójuk.
Axiómák: Pl. Két ponton át egy egyenes húzható. Két különböző egyenesnek 0 vagy 1 metszéspontja lehet. stb.
***Párhuzamosság:*** Két egyenes akkor párhuzamos, ha egy síkban vannak, de nincs metszéspontjuk.
***Szakasz:*** Egy egyenesnek két pontja közé eső része. (A pontokkal együtt egy zárt *szakaszt* alkot, a végpontok nélkül *nyílt szakasz* a neve.)
***Távolság***: Olyan függvény, mely bármely pontpárhoz nemnegatív valós számot rendel.
Jelölései: $AB$, $\overline{AB}$, vagy $d(A;B)$ .
3 tulajdonsága:

- AB=BA
- $AB = 0 \Leftrightarrow A = B$
- $AB + BC \geq AC$ (Háromszög-egyenlőtlenség)

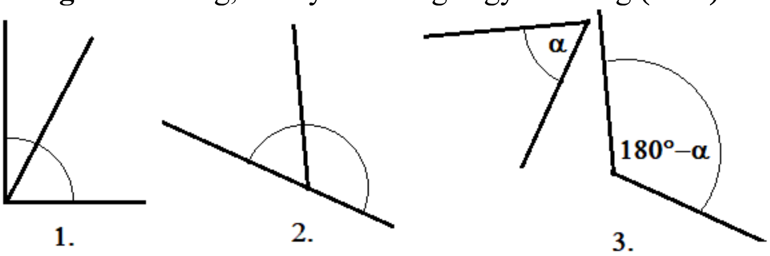



***Szög:*** A sík egy pontjából kiinduló két félegyenes két *szögtartomány*ra bontja a síkot. A „szög” szó jelentheti a szögtartományt, illetve a félegyeneseket is (szögvonal). Azt, hogy a két szögtartomány közül melyikről van szó, a szárak közé rajzolt megfelelő körívvel jelezzük. A félegyenesek közös pontját a szög csúcsának, a félegyeneseket a szög szárainak nevezzük.

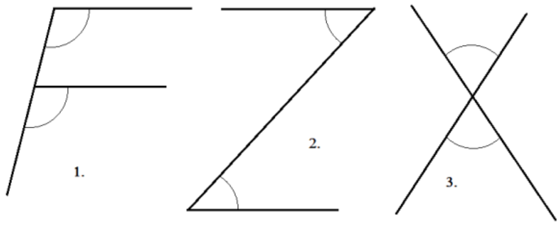



Ha a két félegyenes egybeesik, nullszög és teljesszög keletkezik.
**Szögek mérése**: a teljesszög 360-ad részével, ez egy fok.
*Nullszög*: két szára azonos, nagysága 0°.
*Derékszög*: olyan szög, amely egyenlő a mellékszögével 90°.
*Egyenesszög*: olyan szög, amelynek a szárai egyenest alkotnak. Nagysága 180°.
**Szögtípusok**:Nullszög < hegyesszög< derékszög< tompaszög< egyenesszög< homorúszög<teljesszög.
*Konvex szögek*: az egyenesszögnél nem nagyobb szögek, tehát a nullszög, a derékszög, továbbá a hegyesszögek és tompaszögek és az egyenesszög.
***Merőlegesség:*** Két egyenes/szakasz merőleges egymásra, ha szögük derékszög, azaz 90°.
*Nevezetes szögpárok:*

1. **Pótszögek**: két olyan szög, amelyek összege derékszög.
2. **Mellékszögek**: két olyan szög, amelyeknek egy-egy szára azonos, a másik kettő pedig egyenest alkot. Összegük 180°.
3. **Kiegészítő szögek**: két szög, amelyek összege egyenesszög (180°).



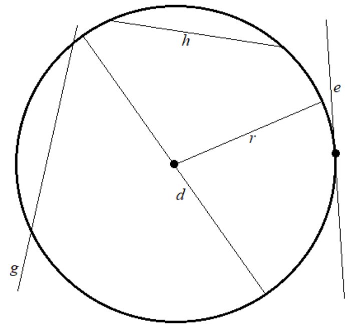
**Párhuzamos szárú szögek** egyenlők vagy kiegészítő szögek. Az egyállású szögek (1.), váltószögek (2.), csúcsszögek (3.) mindig egyenlők.




**A merőleges szárú szögek** egyenlők vagy kiegészítő szögek.

***<u>Kör:</u>*** A **kör** vagy körvonal egy sík azon pontjainak halmaza (más szóhasználattal *mértani helye*), amelyek a sík egy meghatározott pontjától (*középpont*) adott távolságra (*sugár*) vannak. *Körlap*nak nevezzük azon pontok halmazát, melyekre a távolság kisebb vagy egyenlő a sugárral.

**Kör részei, körrel kapcsolatos fogalmak**




A **sugár** *(r)* a kör középpontját és a kör egy pontját összekötő szakasz.
A **húr** *(h)* olyan szakasz, melynek két végpontja a körvonal két pontja.
Az **átmérő** *(d)* olyan húr, mely áthalad a *K* körközépponton (*K* a felezőpontja). Az átmérő hossza kétszer akkora, mint a sugár hossza ( $d=2r$ ).
A **szelő** *(g)* olyan egyenes, amely két pontban metszi a körvonalat.
Az **érintő** *(e)* olyan egyenes, amelynek pontosan egy közös pontja van a körrel.
**Körszelet:** A körlapot egy húr két körszeletre bontja. A körlapot egy átmérő két félkörre bontja. (A félkör speciális körszelet.)

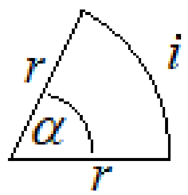
A kör <u>kerülete</u>: $\boldsymbol{K = 2r\pi}$.
A kör <u>területe</u>: $\boldsymbol{T = r^2\pi}$.

$\pi \approx 3{,}1415926535897932384626433832795$

**Középponti szög**: olyan szög, melynek csúcsa egy kör középpontja. Lehet homorúszög is.

Az **ív** a körvonal két pontja közé eső része. Egy körben egy körív hossza egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával. Ki lehet számolni egy körív hosszát a következő képlettel:

$$\frac{\text{ív hossza}}{\text{kör kerülete}} = \frac{\text{középponti szög}}{360°}$$




**Körcikk**: a körnek két sugár közé eső része. Egy körben egy körcikk területe egyenesen arányos a hozzá tartozó középponti szög nagyságával. Ki lehet számolni egy körcikk területét a következő képlettel:

$$\frac{\text{körcikk területe}}{\text{kör területe}} = \frac{\text{középponti szög}}{360°}$$

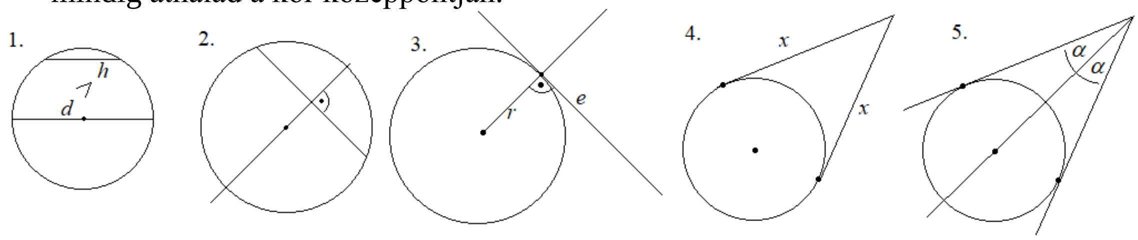
Összefüggés egy körcikk ívhossza (*i*), sugara *(r)* és a körcikk területe között:

$$\text{Körcikk területe} = \frac{i \cdot r}{2}$$

**Körrel kapcsolatos kis tételek:**

0. **A körnek bármely átmérője szimmetriatengelye.**
1. A körben az átmérő a leghosszabb húr.
2. Minden húr felezőmerőlegese áthalad a kör középpontján.

3. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra.
4. Egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz mindig egyenlő.
5. Egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz által bezárt szög szögfelezője mindig áthalad a kör középpontján.




Két kör **koncentrikus**, ha középpontjuk azonos.
A **körgyűrű** két koncentrikus kör közé eső pontok halmaza.
Ha két kör nem koncentrikus, akkor a középpontjaikat összekötő egyenest a körök **centrálisának** nevezzük.
Két kör kívülről és belülről is érintheti egymást, ilyenkor az érintési pont a centrálisra esik.

**<u>Sokszögek</u>:** háromszögek, négyszögek, ötszögek, stb.

- **Belső szög**: egy sokszög csúcsában találkozó két oldal által bezárt, a sokszög belseje felé eső szög.
- **Külső szög**: egy sokszög egy belső szögének mellékszöge.

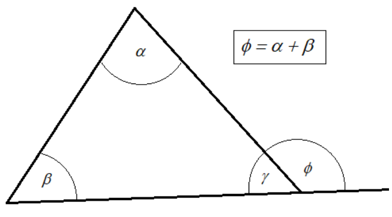
**Konvex sokszög**: minden szöge kisebb 180°-nál.

- Az *n* oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$.
- Az *n* oldalú konvex sokszög külső szögeinek összege 360°. Itt minden csúcsnál csak egy külső szöget tekintünk.
- Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

**Szabályos sokszög**: Minden oldala és minden belső szöge egyenlő.

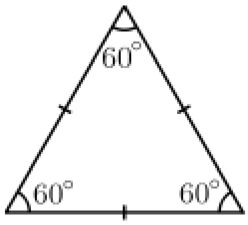
## <u>Háromszögek:</u>

- Minden háromszögben igaz, hogy bármelyik két oldal összege nagyobb a harmadik oldalnál.
- Minden háromszögben igaz, nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög fekszik.
- Minden háromszög belső szögeinek összege 180°.
- A háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Ez a *külsőszög-tétel*. *Ábra* →

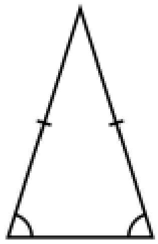


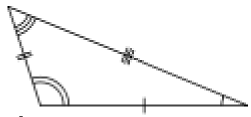

**Speciális háromszögek**

- Az **egyenlő oldalú háromszög** minden oldala azonos hosszúságú. Egyben minden belső szöge is ugyanakkora, mégpedig 60°; tehát szabályos sokszög.
- Az **egyenlő szárú háromszög**nek legalább két oldala azonos hosszúságú. Egyben két belső szöge is ugyanakkora (az alapon fekvő szögek).
- A derékszögű háromszögnek van egy derékszöge.
- A hegyesszögű háromszögnek mindhárom szöge hegyesszög.
- A tompaszögű háromszögnek egyik szöge tompaszög.
- Az **általános háromszög** belső szögei különbözőek és egyik sem derékszög.

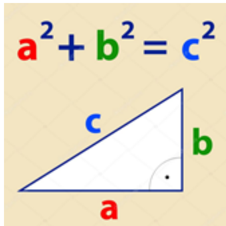


Egyenlő oldalú háromszög


Egyenlő szárú háromszög


Általános háromszög

<u>Pitagorasz tétele</u> (ez egy megfordítható, azaz oda-vissza igaz tétel):
Egyrészt kimondja, hogy bármely **derékszögű** háromszögben az átfogó négyzete megegyezik a két befogó négyzetének összegével – ha $c$ az átfogó, $a$ és $b$ pedig a két befogó, akkor a tétel az alábbi alakban írható le:




$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ha egy háromszög oldalaira igaz ez az egyenlőség, akkor „$c$”-vel szemközt derékszög van.
Ha nem igaz a fenti egyenlőség, akkor is ad információt: ha a bal oldal nagyobb, akkor $c$-vel szemközt tompaszög van, ha a bal oldal kisebb, akkor $c$-vel szemközt hegyesszög van.

<u>Thalész tétele</u>: (ez is egy megfordítható, azaz oda-vissza igaz tétel)
**a)** A **derékszögű** háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontjába esik.
**b)** Ha egy kör átmérőjének A és B végpontját összekötjük a körív A-tól és B-től különböző tetszőleges C pontjával, akkor az ABC háromszög C-nél lévő szöge derékszög lesz.
<u>**a)** és **b)** együtt kimondva:</u> Azon pontok halmaza, ahonnan egy AB szakasz derékszögben látszik, egy AB átmérőjű körvonal, az A és B pontok kivételével. (E körvonalat az AB Thalész-körének nevezzük.)

*A háromszög területképletei:*

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

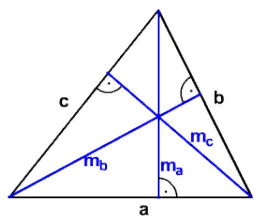
$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ , ahol „$s$” a kerület fele. (Héron-képlet)

$T = s \cdot \rho = \frac{k}{2} \cdot \rho = \frac{a+b+c}{2} \cdot \rho$ , ahol $\rho$ (ró) a beírt kör sugara, „$s$” pedig a kerület fele.

$T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ , ahol „$R$” a körülírt kör sugara.

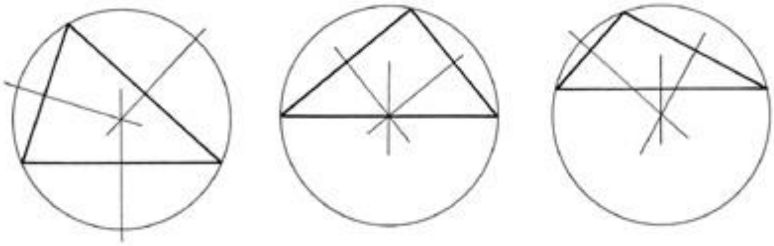
**Háromszögek nevezetes vonalai és ezek tulajdonságai**

**Magasság**: a csúcsból a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőleges. (A „magasság” szó jelölheti ezt az egyenest, magát a szakaszt és a szakasz hosszát is. Egy feladat szövegéből általában kiderül, hogyan kell érteni.)

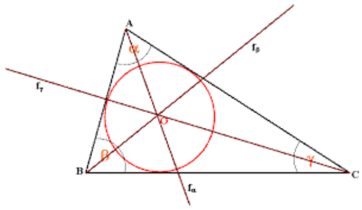



A magasságok egy ponton mennek át, neve: **magasságpont**. Ez derékszögű háromszög esetén maga a derékszögű csúcs, tompaszögű háromszög esetén a háromszögön kívül esik.

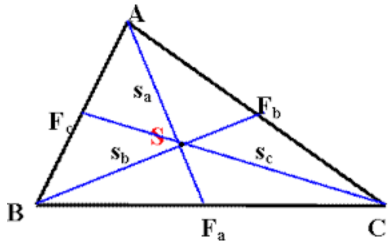
**Oldalfelező merőlegesek**: Egy ponton mennek át, ez a **körülírt kör középpontja**. Derékszögű háromszögnél ez az átfogó felezőpontja (Thalész), tompaszögű háromszögben a háromszögön kívül esik.



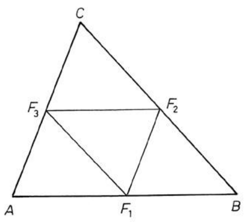
(Belső) **szögfelezők**: Felezik a belső szögeket. Egy ponton mennek át, ez a **beírt kör középpontja**. Ez minden háromszögben a háromszög belsejébe esik.



**Súlyvonalak**: egy csúcsot és a szemközti oldal felezőpontját összekötő szakasz (hossza). A három súlyvonal egy pontban, a **súlypont**ban metszi egymást. A súlypont mindhárom súlyvonalnak (csúcstól távolabb eső) harmadolópontja.




**Középvonalak**: Két oldalfelező pontot összekötő szakasz. Hossza feleakkora, mint a vele szemközti (tőle diszjunkt) háromszögoldal, és párhuzamos is vele. A három középvonal négy egybevágó kisebb háromszögre bontja az eredeti háromszöget.




...és mi kell még? :)

**Transzformációk** (szerkesztésük, tulajdonságaik is kellenek):

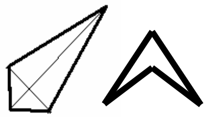
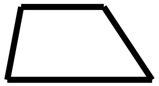
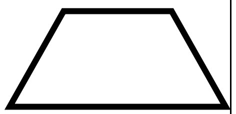
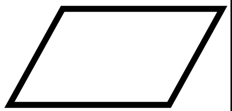
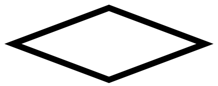
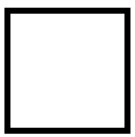
- *tengelyes tükrözés*
- *eltolás*
- *elforgatás* → ennek speciális esete a *középpontos tükrözés*.

**Alapszerkesztések**:

- szakasz és szög másolása, felezése
- adott egyenesre merőleges és vele párhuzamos szerkesztése
- szabályos háromszög, hatszög és négyzet szerkesztése

nevezetes vonalak és körök szerkesztése háromszögben

**Négyszögek** – a tulajdonságok, területképletek külön táblázatban a következő oldalon!

| | Általános ábra | Oldalak | Szögek | Átlók | Terület | Mi más? | Szimmetria |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Deltoid** |  | -két-két<br>szomszédos<br>oldala egyenlő | - két szemközi<br>szöge egyenlő | merőlegesek, a<br>szimm. átló<br>felezi a másikat | $T=\frac{ef}{2}$ | | - **szimmetriatengelye<br>az egyik átló** |
| **Trapéz** |  | - **van<br>párhuzamos<br>oldalpárja** | - egy száron fekvő<br>két szögének az<br>összege $180^{O}$ | - átlói<br>ugyanolyan<br>arányban osztják<br>egymást | $T=\frac{a+c}{2}\cdot m_a$ | | - „általában” nincs |
| **Húrtrapéz<br>(Szimmetrikus<br>trapéz, egyenlő<br>szárú trapéz)** |  | - alapok<br>párhuzamosak<br>- kör írható köré,<br>- szárai egyelőek | egy alapon fekvő<br>2-2 szöge egyenlő<br>egy száron fekvő<br>két szögének<br>összege $180^{O}$ | - átlói egyenlők<br>és ugyanolyan<br>arányban osztják<br>egymást | $T=\frac{a+c}{2}\cdot m_a$ | - trapéz | - **szimmetriatengelye<br>az alapok közös<br>felezőmerőlegese** |
| **Paralelog-<br>ramma** |  | - **szemben lévő<br>oldalai<br>párhuzamosak**<br>és egyenlők | - szomszédos szö-<br>gek összege $180^{O}$<br>- szemközti szögei<br>egyenlők | - átlói felezik<br>egymást | $T=a\cdot m_a$ | - trapéz | - középpontosan<br>szimmetrikus |
| **Rombusz** |  | - **minden oldala<br>egyenlő**,<br>szemköztiek<br>párhuzamosak | - szomszédos<br>szögek összege<br>$180^{O}$<br>- szemközti szögei<br>egyenlők | - átlói<br>merőlegesen<br>felezik egymást | $T=\frac{ef}{2}$<br>$T=a\cdot m_a$ | - deltoid<br>- trapéz<br>- paralelogramma | - 2 db szimmetria<br>tengelye a két átló<br>- középpontosan<br>szimmetrikus |
| **Téglalap** |  | - szemközti<br>oldalai<br>párhuzamosak és<br>egyenlők | - **mind a négy<br>szöge $90^{O}$** | - átlói egyenlők<br>és felezik<br>egymást | $T=a\cdot b$ | - trapéz<br>- húrtrapéz<br>- paralelogramma | - szimm. tengely a két<br>közös oldalfelező<br>merőleges<br>- középpontosan<br>szimmetrikus |
| **Négyzet** |  | - **oldalai<br>egyelőek és**<br>párhuzamosak | - **mind a négy<br>szöge $90^{O}$** | - átlói egyelőek<br>és merőlegesen<br>felezik egymást | $T=a^2$ | - deltoid<br>- trapéz<br>- húrtrapéz<br>- paralelogramma<br>- rombusz<br>- téglalap | - 4 db tengely: felező-<br>merőlegesek és átlók<br>- középpontosan<br>szimmetrikus |

**A kiemelt tulajdonságok definiálják az adott négyszöget – ezekből következnek a többi tulajdonságok**